

Die Nutzleistung binokularer Erdfernrohre* **.

Von

M. BEREK, Wetzlar.

Mit 9 Textabbildungen.

(Eingegangen am 5. Dezember 1947.)

Ein vom Verfasser aufgestelltes allgemeines Wahrnehmungsgesetz wird auf Beobachtungen mit dem Fernrohr angewandt. Solange die Austrittspupille des Fernrohrs kleiner bleibt als die Augenpupille, ist für die Sichtungsschwellen sowie für die Nutzleistung des Fernrohrs gegenüber dem unbewaffneten Auge das Produkt aus der Vergrößerung des Fernrohrs und seiner Austrittspupille, also die Größe des Objektivs maßgebend. Überschreitet die Austrittspupille des Fernrohrs die Augenpupille, so wird allein die Fernrohrvergrößerung maßgeblich. Die theoretisch höchste Nutzleistung wird numerisch gleich dem Zahlenwert der Fernrohrvergrößerung; sie wird aber in Wirklichkeit wegen der Lichtverluste im Fernrohr niemals ganz erreicht. Für kleine Kontraste sinkt im Bereiche kleinster Leuchtdichten die Fernrohrleistung unter die des unbewaffneten Auges. Das Optimum der Kontrastschwellenleistung liegt für größere Sehwinkel immer, für kleine Sehwinkel nur bei größerem Objektivdurchmesser im Bereiche des Nachtsehens. Die Vergütung des Fernrohrs wirkt sich, namentlich im Dämmerungs- und im Nachtsehen, um so vorteilhafter aus, je höher die Leistung des Fernrohrs schon vorher war. Das Wahrnehmungsgesetz stellt die bisher vorliegenden Messungen der Sichtung mit binokularen Erdfernrohren befriedigend dar.

Die folgende Untersuchung befaßt sich mit den aus den physiologischen Gesetzen beim Gebrauch von binokularen Erdfernrohren folgenden Schwellen der Sichtung und mit dem Nutzen, den solche Fernrohre dabei gewähren.

Während für die Sichtbarmachung von lichtschwachen Fixsternen im astronomischen Fernrohr die Diffraktionstheorie in Verbindung mit dem RICCÒschen Satz eine so zuverlässige Grundlage abgibt, daß hierdurch die Größenklassen der Sterne mit guter Sicherheit bestimmt werden können, bestehen hinsichtlich des analogen Problems, das die Wahrnehmung von irdischen Objekten im Fernrohr betrifft, namentlich, sofern es sich um schwache Beleuchtungen handelt, noch sehr geteilte Meinungen. Es hat wohl kaum ein Problem der angewandten Optik in den letzten 3 Jahrzehnten eine so umfangreiche Literatur zu verzeichnen, wie gerade dieses. Dabei fällt es auf, daß systematische

* Prof. CL. SCHAEFER zum 70. Geburtstag gewidmet.

** Die Redaktion hat diese Arbeit angenommen, damit alle Herrn CLEMENS SCHAEFER gewidmeten Arbeiten an derselben Stelle erscheinen. Im allgemeinen vertritt sie den Standpunkt, daß Arbeiten über optische Instrumente in anderen Zeitschriften ihren naturgemäßen Platz finden.

experimentelle Versuche, sofern wir von älteren, wenig definierten Einzelbeobachtungen absehen, bis auf einen Fall, auf den wir später noch zurückkommen werden, in der Literatur nicht vorhanden sind. Andererseits war die theoretische Behandlung dieses Problems bisher erschwert durch die Vielgestaltigkeit der physiologischen Grundgesetze, die bei der Wahrnehmung von Lichtreizen Geltung haben. Sofern nämlich die angulären Dimensionen der Objekte *über* der Auflösungsgrenze liegen — und dieser Fall interessiert uns im folgenden vornehmlich —, kommen wir in einen Bereich, in dem von den physiologischen Grundgesetzen abwechselnd und zum Teil nebeneinander der RICCÒsche Satz, die RICCÒ-PIPERsche Regel, das WEBER-FECHNERSche Gesetz und das Sehschärfengesetz eine Rolle spielen. Alle diese Gesetze führen aber, auf die Nutzleistung von Fernrohren angewandt, zu verschiedenen Folgerungen, deren Tragweite noch deshalb weniger durchsichtig wird, weil die einzelnen Regeln jedesmal nur innerhalb eines beschränkten und dazu nicht scharf abgrenzbaren Bereichs Gültigkeit besitzen. Ich habe daher zunächst versucht, an Stelle der Vielheit von Regeln ein sie alle umfassendes Wahrnehmungsgesetz zu finden. Das Ergebnis dieser Voruntersuchung habe ich bereits vor einiger Zeit an anderer Stelle mitgeteilt¹. Das dort aufgestellte und näher diskutierte *Wahrnehmungsgesetz* schließt sich dem umfangreichen Material, das in der Literatur für Beobachtungen mit unbewaffnetem Auge durch die Arbeiten zahlreicher Forscher zusammengetragen ist, im ganzen Helligkeitsbereich von vollkommener Dunkelheit bis in das Gebiet beginnender Blendung mit Ausnahme weniger Messungen, die offenbar von Beobachtern mit weniger sehtüchtigen Augen stammen, sehr befriedigend an. Dieses alle bekannten Sonderregeln umfassende Gesetz ist verhältnismäßig einfach und lautet:

$$\sqrt{K} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\varphi(B_a)}{B_a}} + \sqrt{\frac{b(B_a)}{B_a}}. \quad (1)$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen ist folgende: Verstehen wir unter B_u die mittlere Leuchtdichte des Umfeldes, ferner unter B_i die des wahrzunehmenden Gegenstandes, so ist

$$K = \frac{B_i - B_u}{B_u} \quad (2)$$

der Kontrast des Gegenstandes gegenüber dem Umfeld. Ist E die Beleuchtungsstärke und bedeutet r_u die mittlere Albedo des Umfeldes, r_i die des Gegenstandes, so gilt bekanntlich, wenn man E in Lux und B in Stilb bzw. in asb mißt:

$$B_{sb} = \frac{r}{10^4 \pi} E_{Lx} \quad \text{oder} \quad B_{asb} = r E_{Lx}. \quad (3)$$

¹ BEREK, M.: Z. Instrumentenkde. **63**, 297 (1943).

Diese Beziehungen bestehen sowohl für B_i, r_i wie auch für B_u, r_u . Der Kontrast läßt sich also auch folgendermaßen schreiben:

$$K = \frac{r_i - r_u}{r_u}. \quad (4)$$

Hiernach hat ein Objekt, das n -mal so stark remittiert wie das Umfeld, den Kontrast $n - 1$, insonderheit ein vollkommen schwarzes Objekt den Kontrast -1 . Die Beziehung (4) ist nur aus Beobachtungen von *positiven* Kontrasten hergeleitet. Es haben aber H. SIEDENTOPF und E. REEGER¹ in neueren Untersuchungen gezeigt, daß für Kontraste, die sich nur wenig von 0 unterscheiden, die Sichtungswellen nur vom Absolutwert des Kontrastes abhängig sind. Dies ändert sich erst bei größeren Kontrasten; die Sichtungsschwelle des Kontrastes -1 fällt im Bereich größerer Umfeldleuchtdichten ($> 10^{-5.5}$ Sb) mit der des Kontrastes $+2$ zusammen, dagegen für Umfeldleuchtdichten $< 10^{-6.5}$ Sb wieder mit der des Kontrastes $+1$. Wir wollen im weiteren nur positive Kontraste berücksichtigen.

σ in (1) ist der Schwellenwert der angulären Größe, in welcher der Gegenstand dem Auge dargeboten werden muß, wenn er beim Kontrast K gegen das Umfeld und bei einer Leuchtdichte B_u desselben gesehen werden soll.

B_a ist die Adaptionleuchtdichte des Auges. Sie kann in den uns interessierenden Fällen in ausreichender Annäherung mit der Leuchtdichte B_u des Umfeldes gleichgesetzt werden. Die Bedeutung der Funktionen $\varphi(B_a)$ und $b(B_a)$ wird aus folgendem anschaulich: Wenn σ so klein ist, daß wir auf der rechten Seite von (1) den zweiten Summanden gegenüber dem ersten vernachlässigen können, erhalten wir nach Quadrierung:

$$\sigma^2 B_a K = \varphi(B_a). \quad (5)$$

Multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der Fläche der Eintrittspupille des Auges und benutzen (2), so folgt zunächst aus (5), wegen $B_a = B_u$:

$$\frac{\pi}{4} (D_{EP})_A^2 \cdot \sigma^2 (B_i - B_u) = \frac{\pi}{4} (D_{EP})_A^2 \cdot \varphi(B_a). \quad (6)$$

Ist nun G die Größe einer kreisförmig abgegrenzten Fläche im Objekt, deren Durchmesser unter dem Schwinkel σ erscheint, und ist e die Entfernung des Objekts vom Auge, so ist für *kleine* Winkel σ der räumliche Winkel, unter dem G vom Auge aus gesehen wird:

$$\frac{\pi}{4} \sigma^2 = \frac{G}{e^2}. \quad (7)$$

Bedeutet ferner ω den räumlichen Winkel, unter dem die Fläche der Augenpupille vom Ort des Gegenstandes aus erscheint, so ist

$$\omega = \frac{\pi}{4} \frac{(D_{EP})_A^2}{e^2}. \quad (8)$$

¹ SIEDENTOPF, H. u. E. REEGER: Z. Instrumentenkde. 64, 83 (1944).

Mit (7) und (8) erhält man aus (6):

$$\frac{4}{\pi} G \cdot \omega \cdot (B_i - B_u) = \frac{\pi}{4} (D_{EP})_A^2 \cdot \varphi(B_a). \quad (9)$$

Links steht das $4/\pi$ -fache des Differenzlichtstroms, den gleiche Flächenstücke G des Gegenstandes und des Umfeldes dem Auge zusenden. Es ist also $\varphi(B_a)$ der auf die Flächeneinheit der Augenpupille bezogene, mit $4/\pi$ multiplizierte Betrag dieses Differenzlichtstroms. Der Inhalt von (5) ist gleichbedeutend mit dem des RICCÒschen Satzes, der besagt, daß bei derselben Adaptionsleuchtdichte für kleine Sehinkel der Lichtstrom $\sigma^2 B_a K$ eine Konstante ist.

Die Bedeutung der Funktion $b(B_a)$ wird ersichtlich, wenn wir so große Sehinkel betrachten, daß auf der rechten Seite von (1) der erste Summand gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden kann. Dann folgt:

$$K = \frac{b(B_a)}{B_a}. \quad (10)$$

Dies ist mit dem WEBER-FECHNERSchen Gesetz identisch, welches besagt, daß bei großen Werten von σ der wahrnehmbare Kontrast nur von der Adaptionsleuchtdichte, aber nicht mehr im einzelnen von σ selbst abhängt. Weil nach (10) im Bereiche des WEBER-FECHNERSchen Gesetzes $b(B_a) = K B_a \approx B_i - B_u$ ist, bedeutet $b(B_a)$ die im Bereiche dieses Gesetzes zur Wahrnehmung eines Gegenstandes erforderliche Leuchtdichtedifferenz zwischen Gegenstand und Umfeld.

Das Gesetz (1) gilt zunächst nur für das unbewaffnete Auge. Offenbar muß es aber auch für das Sehen in Verbindung mit einem optischen Instrument zurecht bestehen, wenn wir nur den modifizierenden Umständen Rechnung tragen; denn wenn dem Auge Lichtreize dargeboten werden, dürfte es von sich aus nicht unterscheiden, ob ihm diese unmittelbar oder durch Vermittlung eines optischen Instruments zugeleitet werden. Zum Unterschied gegen die Beobachtung mit dem unbewaffneten Auge versehen wir die entsprechenden Größen bei Fernrohrbenutzung mit dem Index * und stellen sie uns nun dar.

Der dem Auge in Verbindung mit dem Fernrohr dargebotene Sehinkel σ^* ist gegenüber dem dingseitigen Γ -mal vergrößert, wenn Γ die Vergrößerung des Fernrohres bedeutet. Es ist also:

$$\sigma^* = \sigma \cdot \Gamma. \quad (11)$$

Es sei μ der Durchlässigkeitsfaktor des Fernrohres in der Mitte seines Sehfeldes. Dann wird die Leuchtdichte B durch das Fernrohr auf den Wert

$$B^* = \mu B. \quad (12)$$

herabgesetzt. In dem Faktor μ ist sowohl das direkt durch das Fernrohr hindurchgegangene (im Innern des Fernrohres nicht gespiegelte)

Licht wie auch das nach wiederholten inneren Reflexionen in den Bildraum gelangende Reflexlicht enthalten. Bezeichnen wir den ersten Anteil mit ν , den zweiten mit λ , so ist

$$\mu = \nu + \lambda. \quad (13)$$

Wenn nun das Umfeld groß gegenüber den interessierenden Einzelheiten in ihm ist, sinkt bei Benutzung des Fernrohrs der Kontrast der Objekte durch die Lichtverluste und durch das falsche Licht auf den Wert:

$$\left. \begin{aligned} K^* &= \frac{B_i^* - B_u^*}{B_u^*} = \frac{(\nu B_i + \lambda B_u) - (\nu B_u + \lambda B_u)}{\nu B_u + \lambda B_u} \\ &= \frac{\nu}{\mu} \frac{B_i - B_u}{B_u} = \frac{\nu}{\mu} K. \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

Bedeutet ferner $(D_{EP})_F$ den Durchmesser der Eintrittspupille des Fernrohrs (also den Durchmesser des Fernrohrobjektivs), und ist $(D_{AP})_F$ der Durchmesser der Austrittspupille des Fernrohrs, wobei nach einem bekannten Gesetz der geometrischen Optik die Beziehung besteht:

$$(D_{EP})_F = F \cdot (D_{AP})_F, \quad (14)$$

und ist schließlich $(D_{EP})_A^*$ der Durchmesser der Eintrittspupille des Auges beim Gebrauch des Fernrohrs (durch den Index * gegenüber der Öffnung der Augenpupille des unbewaffneten Auges unterschieden), so gilt, wenn wir uns daran erinnern, daß φ einen spezifischen, auf die Flächeneinheit bezogenen Lichtstrom bedeutet, folgende Beziehung: Solange $(D_{AP})_F \leq (D_{EP})_A^*$ bleibt, ist

$$\varphi^*(B_a^*) = \frac{(D_{EP})_A^{*2}}{(D_{AP})_F^2} \cdot \varphi(\mu B_a), \quad (15)$$

während im Falle $(D_{AP})_F \geq (D_{EP})_A^*$, weil dann ein Teil des Lichtstroms unbenutzt bleibt, einfach

$$\varphi^*(B_a^*) = \varphi(\mu B_a) \quad (15a)$$

wird. Dabei ist immer B_a (ohne Index *) die Adaptionsleuchtdichte für das unter sonst gleichen Verhältnissen unbewaffnete Auge.

Die Funktion $b(B_a)$: B_a schließlich transformiert sich, da sie nach (10) die Bedeutung eines Kontrastes hat, wie ihr Argument, also

$$\frac{b^*(B_a^*)}{B_a^*} = \frac{b(\mu B_a)}{\mu B_a}. \quad (16)$$

In Verbindung mit dem Fernrohr leitet sich also aus (1) und aus (11) bis (16) das Wahrnehmungsgesetz in folgender Form ab:

$$\sqrt{\frac{\nu}{\mu}} K = \frac{1}{\sigma F} \sqrt{\frac{\varphi(\mu B_a)}{\mu B_a}} + \sqrt{\frac{b(\mu B_a)}{\mu B_a}}. \quad (17)$$

Hierin bedeutet nach (14), (15) und (15 a), je nachdem, ob $(D_{AP})_F \leq$ bzw. $\geq (D_{EP}^*)_A$ ist, F folgende Abkürzung:

$$F = \frac{(D_{EP})_F}{(D_{EP}^*)_A} \quad \text{bzw.} \quad = I'. \quad (17a)$$

Hinsichtlich der Gültigkeit des Gesetzes (17) müssen wir noch einige Einschränkungen machen: Für die Sichtungsverhältnisse sind Lichtströme maßgeblich, und diese werden durch die in räumlichen Winkeln fließenden Energien bestimmt. In der Beziehung (17) ist aber, ebenso wie in (1), im Anschluß an die übliche Darstellungsweise, wie sie sich (leider) eingebürgert hat und von der wir deshalb auch hier nicht abweichen wollen, die Objektgröße durch den ebenen Winkel σ definiert. Wir wollen daher der Vorsicht halber voraussetzen, daß sich σ jeweils auf den Durchmesser eines kreisförmig abgegrenzten Flächenstückes bezieht. Inwieweit es statthaft ist, Flächenstücke von beliebiger Gestalt durch eine äquivalente Kreisfläche zu ersetzen und deren angulären Durchmesser mit σ zu identifizieren, darüber liegen keine Untersuchungen vor. Ferner müssen wir Objekte von sehr großen angulären Ausmaßen ausschließen; denn die Durchlässigkeit μ ändert sich innerhalb des Sehfeldes des Fernrohrs außerordentlich stark. Für einen Feldstecher 7×50 z. B. fällt die Durchlässigkeit (nach Messungen, die in den optischen Werken E. Leitz, Wetzlar, von Herrn A. RIEDE ausgeführt wurden) von etwa 0,65 in der Mitte des Gesichtsfeldes auf etwa 0,32 am Gesichtsfeldrand. Auch bei vergüteten (d. i. mit reflexmindernder Belegung ausgestatteten) Fernrohren bleibt der Abfall beträchtlich, nämlich von nahezu 0,80 bis auf etwa 0,43. Wenn man bei der Anwendung von (17) nicht große Schwinkel σ ausschließt, ist die Durchlässigkeit unzureichend definiert. Auch bei der photometrischen Bestimmung ist darauf zu achten, daß μ für die Mitte des Sehfeldes gemessen wird. Auf kleinere Schwankungen von μ , wie sie aus der Unsicherheit solcher Messungen entspringen, ist die Beziehung (17) nicht empfindlich. Noch aus einem zweiten Grund darf das Bild des Gegenstandes im Fernrohr nicht zu große Ausmaße annehmen, vielmehr muß das Umfeld auch im Fernrohr trotz der Beschränkung des Gesichtsfeldes noch groß gegenüber dem Bild des Gegenstandes bleiben. Andernfalls wird die Leistung des Fernrohrs (durch den sog. Rohreffekt) merklich beeinträchtigt.

Wenn wir von der Absorption des Lichts absehen, die bei Erdfernrohren im Vergleich zu den Lichtverlusten durch Reflexion jedenfalls gering ist, lassen sich die Größen μ und ν leicht mit guter Genauigkeit berechnen. Für die Mitte des Sehfeldes ist:

$$\mu = \frac{1}{1 + \sum_1^k \varrho}; \quad \nu = \frac{1}{\prod_1^k (1 + \varrho)}; \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{1 + \sum_1^k \varrho}{\prod_1^k (1 + \varrho)}; \quad \varrho = \frac{R}{1 - R}. \quad (18)$$

Diese Beziehungen, die mir nur den vorliegenden Zweck Herr H. MARX in dieser einfachen Form dargestellt hat, berücksichtigen alle inneren Reflexionen bis zur unendlichen Wiederholung. R ist das nach den FRESNELSchen Formeln zu berechnende Reflexionsvermögen einer einzelnen brechenden Fläche. Die Summation \sum bzw. die Produktbildung \prod ist über alle k Flächen des Systems zu erstrecken. Solange von der Absorption abgesehen werden kann, ist, wie aus (18) ersichtlich, die Reihenfolge der Flächen im System für dessen Durchlässigkeitsfaktoren ohne Belang.

In den Tabellen 1a bis 1e gebe ich ausführliche Darstellungen der Funktionen φ und b in Abhängigkeit von B und μ . Da diese Funktionen aus dem gesamten verfügbaren Beobachtungsmaterial abgeleitet sind, also aus Sichtungsmessungen, die verschiedenen Beobachtern entstammen, können sie nur *durchschnittlichen* Verhältnissen entsprechen. Eine nähere oder gar individuelle Präzisierung ist schon deshalb nicht möglich, weil die Autoren es versäumt haben, die Größe der jeweiligen Augenpupille der Beobachter mitzubestimmen. Nun tritt aber in der Sichtigungsformel (17), die für das Auge in Verbindung mit dem Fernrohr gilt, die Augenpupille des Beobachters auch noch explizit auf, und wir müssen daher bei quantitativen Anwendungen dieser Formel, solange $(D_{AP})_F < (D_{EP}^*)_A$ ist, eine Festsetzung über die Zuordnung von $(D_{EP}^*)_A$ zu B treffen. Machen wir den Ansatz:

$$(D_{EP})_A = a + \frac{b}{\sqrt{B + c}}, \tag{19}$$

Tabelle 1. Die Funktionen $\varphi(\mu B)$ und $b(\mu B)$, auf σ in Minuten bezogen.

a) $\sqrt{\varphi(\mu B)}$.

log B _{Sb}	μ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
— 8,5	—	—	—	—	0 ₂ 201	0 ₂ 216	0 ₂ 231	0 ₂ 244	0 ₂ 254	0 ₂ 264
— 8	0 ₂ 159	0 ₂ 222	0 ₂ 259	0 ₂ 285	0 ₂ 306	0 ₂ 321	0 ₂ 337	0 ₂ 349	0 ₂ 360	0 ₂ 369
— 7,5	0 ₂ 264	0 ₂ 327	0 ₂ 365	0 ₂ 391	0 ₂ 412	0 ₂ 427	0 ₂ 443	0 ₂ 455	0 ₂ 466	0 ₂ 476
— 7	0 ₂ 369	0 ₂ 434	0 ₂ 471	0 ₂ 498	0 ₂ 519	0 ₂ 535	0 ₂ 551	0 ₂ 564	0 ₂ 575	0 ₂ 585
— 6,5	0 ₂ 476	0 ₂ 542	0 ₂ 580	0 ₂ 608	0 ₂ 630	0 ₂ 646	0 ₂ 663	0 ₂ 676	0 ₂ 688	0 ₂ 699
— 6	0 ₂ 585	0 ₂ 653	0 ₂ 693	0 ₂ 723	0 ₂ 746	0 ₂ 763	0 ₂ 781	0 ₂ 796	0 ₂ 808	0 ₂ 820
— 5,5	0 ₂ 699	0 ₂ 770	0 ₂ 814	0 ₂ 846	0 ₂ 872	0 ₂ 891	0 ₂ 911	0 ₂ 927	0 ₂ 942	0 ₂ 955
— 5	0 ₁ 082	0 ₁ 090	0 ₁ 095	0 ₁ 099	0 ₁ 101	0 ₁ 104	0 ₁ 106	0 ₁ 108	0 ₁ 110	0 ₁ 112
— 4,5	0 ₁ 096	0 ₁ 105	0 ₁ 111	0 ₁ 115	0 ₁ 119	0 ₁ 122	0 ₁ 125	0 ₁ 128	0 ₁ 130	0 ₁ 132
— 4	0 ₁ 112	0 ₁ 123	0 ₁ 131	0 ₁ 137	0 ₁ 143	0 ₁ 147	0 ₁ 151	0 ₁ 155	0 ₁ 158	0 ₁ 161
— 3,5	0 ₁ 132	0 ₁ 148	0 ₁ 160	0 ₁ 169	0 ₁ 177	0 ₁ 183	0 ₁ 190	0 ₁ 196	0 ₁ 201	0 ₁ 206
— 3	0 ₁ 161	0 ₁ 186	0 ₁ 203	0 ₁ 218	0 ₁ 230	0 ₁ 241	0 ₁ 252	0 ₁ 261	0 ₁ 270	0 ₁ 278
— 2,5	0 ₁ 206	0 ₁ 245	0 ₁ 274	0 ₁ 298	0 ₁ 320	0 ₁ 339	0 ₁ 356	0 ₁ 372	0 ₁ 387	0 ₁ 402
— 2	0 ₁ 278	0 ₁ 344	0 ₁ 394	0 ₁ 436	0 ₁ 473	0 ₁ 506	0 ₁ 537	0 ₁ 565	0 ₁ 592	0 ₁ 617
— 1,5	0 ₀ 040	0 ₀ 052	0 ₀ 061	0 ₀ 068	0 ₀ 074	0 ₀ 080	0 ₀ 086	0 ₀ 091	0 ₀ 096	0 ₀ 100
— 1	0 ₀ 062	0 ₀ 082	0 ₀ 098	0 ₀ 111	0 ₀ 123	0 ₀ 134	0 ₀ 143	0 ₀ 152	0 ₀ 161	0 ₀ 169

Tabelle I. (Fortsetzung.)

b) $\sqrt{b(\mu B)}$.

log B _{Sb}	μ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
— 8,5	—	—	—	—	0 ₄ 137	0 ₄ 147	0 ₄ 158	0 ₄ 167	0 ₄ 175	0 ₄ 183
— 8	0 ₄ 114	0 ₄ 151	0 ₄ 179	0 ₄ 201	0 ₄ 220	0 ₄ 236	0 ₄ 253	0 ₄ 268	0 ₄ 281	0 ₄ 293
— 7,5	0 ₄ 183	0 ₄ 243	0 ₄ 287	0 ₄ 323	0 ₄ 354	0 ₄ 380	0 ₄ 407	0 ₄ 430	0 ₄ 451	0 ₄ 471
— 7	0 ₄ 293	0 ₄ 390	0 ₄ 461	0 ₄ 519	0 ₄ 569	0 ₄ 610	0 ₄ 654	0 ₄ 691	0 ₄ 725	0 ₄ 758
— 6,5	0 ₃ 047	0 ₃ 063	0 ₃ 074	0 ₃ 083	0 ₃ 091	0 ₃ 098	0 ₃ 105	0 ₃ 111	0 ₃ 117	0 ₃ 122
— 6	0 ₃ 076	0 ₃ 101	0 ₃ 119	0 ₃ 134	0 ₃ 147	0 ₃ 158	0 ₃ 169	0 ₃ 178	0 ₃ 187	0 ₃ 196
— 5,5	0 ₃ 122	0 ₃ 162	0 ₃ 191	0 ₃ 215	0 ₃ 236	0 ₃ 253	0 ₃ 271	0 ₃ 287	0 ₃ 301	0 ₃ 314
— 5	0 ₃ 196	0 ₃ 266	0 ₃ 308	0 ₃ 346	0 ₃ 380	0 ₃ 407	0 ₃ 436	0 ₃ 461	0 ₃ 484	0 ₃ 505
— 4,5	0 ₃ 314	0 ₃ 418	0 ₃ 494	0 ₃ 556	0 ₃ 610	0 ₃ 654	0 ₃ 701	0 ₃ 740	0 ₃ 777	0 ₃ 812
— 4	0 ₂ 051	0 ₂ 067	0 ₂ 079	0 ₂ 089	0 ₂ 098	0 ₂ 105	0 ₂ 113	0 ₂ 119	0 ₂ 125	0 ₂ 130
— 3,5	0 ₂ 081	0 ₂ 108	0 ₂ 128	0 ₂ 144	0 ₂ 158	0 ₂ 169	0 ₂ 181	0 ₂ 191	0 ₂ 201	0 ₂ 210
— 3	0 ₂ 130	0 ₂ 174	0 ₂ 205	0 ₂ 231	0 ₂ 253	0 ₂ 271	0 ₂ 291	0 ₂ 307	0 ₂ 322	0 ₂ 337
— 2,5	0 ₂ 210	0 ₂ 279	0 ₂ 330	0 ₂ 371	0 ₂ 407	0 ₂ 436	0 ₂ 467	0 ₂ 494	0 ₂ 518	0 ₂ 541
— 2	0 ₂ 337	0 ₂ 448	0 ₂ 530	0 ₂ 596	0 ₂ 654	0 ₂ 701	0 ₂ 751	0 ₂ 793	0 ₂ 832	0 ₂ 870
— 1,5	0 ₁ 054	0 ₁ 072	0 ₁ 085	0 ₁ 096	0 ₁ 105	0 ₁ 113	0 ₁ 121	0 ₁ 127	0 ₁ 134	0 ₁ 140
— 1	0 ₁ 087	0 ₁ 116	0 ₁ 137	0 ₁ 154	0 ₁ 169	0 ₁ 181	0 ₁ 194	0 ₁ 205	0 ₁ 215	0 ₁ 225

c) $\sqrt{\frac{\varphi(\mu B)}{\mu B}}$.

log B _{Sb}	μ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
— 8,5	—	—	—	—	50,5	49,8	49,2	48,4	47,7	46,9
— 8	50,3	49,7	47,3	45,1	43,2	41,8	40,2	39,0	37,9	36,9
— 7,5	46,9	41,1	37,4	34,8	32,7	31,2	29,8	28,6	27,7	26,8
— 7	36,9	30,7	27,2	24,9	23,2	22,0	20,8	19,9	19,2	18,5
— 6,5	26,8	21,5	18,8	17,1	15,8	14,9	14,1	13,4	12,9	12,4
— 6	18,5	14,6	12,7	11,4	10,5	9,92	9,34	8,89	8,52	8,20
— 5,5	12,4	9,69	8,36	7,52	6,93	6,51	6,12	5,83	5,58	5,37
— 5	8,20	6,36	5,48	4,93	4,54	4,27	4,01	3,83	3,66	3,53
— 4,5	5,37	4,17	3,59	3,24	3,00	2,82	2,66	2,54	2,44	2,35
— 4	3,53	2,76	2,40	2,17	2,01	1,91	1,81	1,73	1,67	1,61
— 3,5	2,35	1,87	1,64	1,50	1,41	1,34	1,28	1,23	1,19	1,16
— 3	1,61	1,31	1,17	1,09	1,03	0,990	0,952	0,924	0,900	0,880
— 2,5	1,16	0,974	0,890	0,839	0,804	0,779	0,757	0,740	0,726	0,714
— 2	0,880	0,770	0,720	0,690	0,669	0,655	0,642	0,632	0,624	0,617
— 1,5	0,714	0,649	0,622	0,604	0,592	0,584	0,577	0,571	0,567	0,563
— 1	0,617	0,581	0,565	0,556	0,550	0,545	0,542	0,539	0,537	0,535

der zunächst nur das unbewaffnete Auge betrifft, so bedeutet darin a den Durchmesser der Augenpupille für sehr große Werte von B , also im Bereich der Blendung, und $a + \frac{b}{c}$ den Durchmesser im Bereich vollkommener Dunkelheit. Der Sinn der Formel ergibt sich aus folgendem: Denken wir uns $(D_{EP})_A$ über \sqrt{B} aufgetragen und verschieben dann das Koordinatensystem parallel zu sich selbst, in Richtung der Ordinaten um den Betrag $+a$ und in Richtung der Abszissen um

Tabelle I. (Fortsetzung.)

$$d) \sqrt{\frac{b(\mu B)}{\mu B}}$$

log B _{Sb}	μ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
— 8,5	—	—	—	—	0,345	0,340	0,335	0,331	0,328	0,325
— 8	0,359	0,338	0,326	0,318	0,312	0,307	0,303	0,299	0,296	0,293
— 7,5	0,325	0,305	0,295	0,287	0,282	0,278	0,274	0,270	0,268	0,265
— 7	0,293	0,276	0,266	0,260	0,255	0,251	0,247	0,244	0,242	0,240
— 6,5	0,265	0,249	0,241	0,235	0,230	0,227	0,224	0,221	0,218	0,216
— 6	0,240	0,225	0,217	0,212	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,196
— 5,5	0,216	0,204	0,197	0,192	0,188	0,185	0,182	0,180	0,178	0,177
— 5	0,196	0,188	0,178	0,173	0,170	0,167	0,165	0,163	0,161	0,160
— 4,5	0,177	0,166	0,160	0,156	0,153	0,151	0,149	0,147	0,146	0,144
— 4	0,160	0,150	0,145	0,141	0,139	0,137	0,135	0,133	0,132	0,130
— 3,5	0,144	0,136	0,131	0,128	0,125	0,123	0,122	0,120	0,119	0,118
— 3	0,130	0,123	0,118	0,115	0,113	0,112	0,110	0,109	0,107	0,106
— 2,5	0,118	0,111	0,107	0,104	0,102	0,101	0,099	0,098	0,097	0,096
— 2	0,106	0,100	0,097	0,094	0,092	0,091	0,090	0,089	0,088	0,087
— 1,5	0,096	0,091	0,087	0,085	0,083	0,082	0,081	0,080	0,079	0,079
— 1	0,087	0,082	0,079	0,077	0,075	0,074	0,073	0,072	0,072	0,071

$$e) \sqrt{\frac{\mu \cdot \varphi(B)}{\varphi(\mu B)}}$$

log B _{Sb}	μ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
— 8,5	—	—	—	—	0,930	0,942	0,955	0,969	0,985	1
— 8	0,734	0,744	0,781	0,819	0,854	0,891	0,918	0,947	0,975	1
— 7,5	0,571	0,651	0,715	0,770	0,818	0,863	0,899	0,935	0,969	1
— 7	0,501	0,604	0,680	0,743	0,797	0,847	0,888	0,928	0,966	1
— 6,5	0,464	0,577	0,659	0,727	0,784	0,837	0,882	0,924	0,963	1
— 6	0,443	0,561	0,648	0,717	0,777	0,832	0,878	0,922	0,962	1
— 5,5	0,432	0,554	0,642	0,714	0,775	0,830	0,877	0,921	0,962	1
— 5	0,430	0,555	0,644	0,716	0,770	0,833	0,879	0,923	0,963	1
— 4,5	0,438	0,565	0,655	0,726	0,785	0,840	0,884	0,927	0,965	1
— 4	0,457	0,585	0,674	0,744	0,801	0,852	0,894	0,933	0,968	1
— 3,5	0,492	0,620	0,706	0,771	0,824	0,871	0,908	0,941	0,972	1
— 3	0,545	0,670	0,750	0,808	0,854	0,892	0,925	0,953	0,978	1
— 2,5	0,617	0,733	0,802	0,852	0,889	0,919	0,944	0,965	0,984	1
— 2	0,701	0,802	0,858	0,895	0,923	0,944	0,962	0,976	0,989	1
— 1,5	0,789	0,867	0,906	0,934	0,952	0,966	0,977	0,986	0,994	1
— 1	0,867	0,921	0,947	0,962	0,973	0,981	0,988	0,992	0,997	1

den Betrag c , so gehorchen die neuen Koordinaten $(D'_{EP})_A$ und $\sqrt{B'}$ nach (19) der Hyperbelgleichung $(D'_{EP})_A \cdot \sqrt{B'} = b$. Die Konstanten a und c bestimmen aber die obere und die untere Grenze der Pupillenweite. Wenn solche Begrenzungen nicht vorhanden wären, würde sich demnach mit dem Wechsel von B die Pupillenöffnung so ändern, daß $(D'_{EP})_A^2 \cdot B$ konstant bliebe, also immer der gleiche Lichtstrom ins

Tabelle 2. *Durchschnittswerte für den Durchmesser der Eintrittspupillen der unbewaffneten Augen nach (19) und (19a).*

$\log B_{Sb}$	$\log B_{asb}$	$(D_{EP})_A$ mm	$\log B_{Sb}$	$\log B_{asb}$	$(D_{EP})_A$ mm
-8,5	-4	7,41	-4,5	0	6,56
-8	-3,5	7,40	-4	+0,5	6,05
-7,5	-3	7,39	-3,5	+1	5,37
-7	-2,5	7,36	-3	+1,5	4,58
-6,5	-2	7,32	-2,5	+2	3,80
-6	-1,5	7,24	-2	+2,5	3,13
-5,5	-1	7,11	-1,5	+3	2,63
-5	-0,5	6,90	-1	+3,5	2,30

Auge gelangte. Mit folgenden Werten [auf $(D_{EP})_A$ in mm bezogen]:

$$a = 1,8; \quad b = 0,174; \quad c = 0,031 \quad (19a)$$

erhalten wir die in Tabelle 2 dargestellte Abhängigkeit des Pupillendurchmessers von B , die sich den Messungen von P. REEVES, denen von J. BLANCHARD und auch denen von W. NAGEL und A. KLUGHARDT im ganzen Leuchtdichtebereich befriedigend anschließt. Wir wollen daher diese Pupillengrößen als *normale Durchschnittswerte* beim freien Sehen ansehen. Es ist dies natürlich eine gewisse Willkür, zu der wir aber letzten Endes gezwungen sind.

Zur Berechnung von $(D_{EP}^*)_A$ in Verbindung mit dem Fernrohr muß man in (19) B durch μB ersetzen; dies macht im Bereiche des Nachtsehens nur wenig aus, dagegen mehr im Tagsehen; solange dort $(D_{AP})_F < (D_{EP}^*)_A$ bleibt, muß man dies berücksichtigen. Im Tagesehen wird, zufolge der Abschirmung des Sehfeldes durch das Fernrohr, $(D_{EP}^*)_A$ in Wirklichkeit noch ein wenig größer sein, als so berechnet.

*Die Anforderungen an ein Fernrohr für die Sichtung
eines vorgegebenen Objekts.*

Wenn in einem Umfeld von der Leuchtdichte B ein Objekt von der angularen Größe σ und mit dem Kontrast K gegen das Umfeld gesehen werden soll, muß das Fernrohr nach (17) der Bedingung genügen:

$$F = \frac{\sqrt{\frac{\varphi(\mu B)}{\mu B}}}{\sigma \left\{ \sqrt{\frac{v}{\mu} K} - \sqrt{\frac{b(\mu B)}{\mu B}} \right\}} \quad (20)$$

Dies bedeutet wegen (14) und wegen (17a), wie man leicht einsieht, eine doppelte Bedingung für das Fernrohr, nämlich

$$(D_{EP})_F \geq F \cdot (D_{EP}^*)_A \quad \text{und zugleich} \quad I \geq F. \quad (20a)$$

In Abb. 1 sind zu $K=1$ und zu $K=0,1$ sowie zu $\sigma=10'$ und zu $\sigma=1'$ die nach (20), (20a) berechneten, zur Sichtung erforderlichen Mindestgrößen von $(D_{EP})_F$ und von Γ in Abhängigkeit von B dargestellt. Die Annahmen $\mu=0,78$, $\nu/\mu=0,986$ entsprechen durchschnittlichen Verhältnissen bei vergüteten Fernrohren. An den mit \bullet bezeichneten Stellen wird das Objekt wegen $\Gamma=1$ jedesmal auch schon mit unbewaffnetem Auge gesichtet. Die erste Bedingung in (20a) darf nicht dazu benutzt werden, um daraus eine Abhängigkeit der erforderlichen Objektivöffnung von der individuellen Größe der Augenpupillen herzuleiten; denn schon die Funktionen φ und b , also schließlich auch F , betreffen nur Durchschnittswerte von $(D_{EP}^*)_A$. Das hat eine gewisse, wenn auch nicht große Unsicherheit der Auswertungen zur Folge.

Die oft in letzter Zeit aufgeworfene Frage, inwieweit eine kleinere Austrittspupille des Fernrohrs durch eine stärkere Vergrößerung ausgeglichen werden kann, ist müßig; denn nach (20a) kommt es nicht auf die

Austrittspupille des Fernrohrs, sondern auf den Objektivdurchmesser, den Durchmesser der Augenpupille und auf die Vergrößerung an. Wählt man die Größe von $(D_{EP})_F$ und von Γ entsprechend den Gleichheitszeichen in (20a), so wird die Austrittspupille des Fernrohrs gleich der Augenpupille. Man kann natürlich Γ auch größer nehmen. Bei unverändertem Objektivdurchmesser wird dann die Fernrohraustrittspupille kleiner als die Augenpupille, aber ohne daß die Eigenschaften der Sichtung sich dadurch ändern; denn nach (17a) wird im Falle $(D_{AP})_F < (D_{EP}^*)_A$ der Wert von Γ belanglos, wohlgermerkt für die Sichtung, nicht für die Sehschärfe. Es sei darauf hingewiesen, daß es sich bei allen unseren Betrachtungen nicht um Sehschärfeschwellen in dem Sinne handelt, wie dieser Begriff in der Ophthalmologie zur Kennzeichnung der Fähigkeit, Schriftzeichen zu entziffern, gebraucht

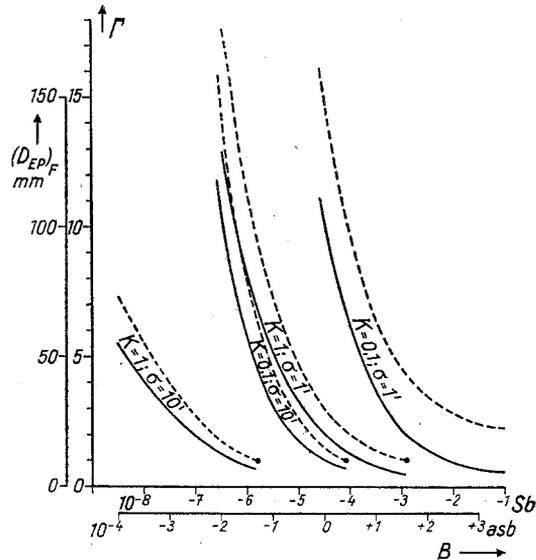


Abb. 1. Anforderungen an ein Fernrohr für die Sichtung eines vorgegebenen Objektes. Durchlässigkeitsfaktoren: $\mu=0,78$; $\nu/\mu=0,986$. $(D_{EP}^*)_A$ nach (19) mit (19a) unter Berücksichtigung von μ . — $(D_{EP})_F$; - - - Γ ; \bullet $\Gamma=1$.

wird, sondern um Wahrnehmung- (Sichtungs-) Schwellen. Die Sichtung erfordert ein Mindestmaß von Objektivdurchmesser *und* Vergrößerung.

Die mit einem vorgegebenen Fernrohr erreichbaren Schwellenwerte der Sichtung. Die Nutzleistung des Fernrohrs gegenüber dem unbewaffneten Auge.

Außer der in (20) dargestellten Größe F , welche lediglich die Eigenschaften des Fernrohrs betrifft, kann das Gesetz (1) bzw. (17) zur Bestimmung von drei physiologischen Schwellenwerten dienen: Der Schwelle σ der angularen Objektgröße, der Kontrastschwelle K und der Schwelle der Leuchtdichte B bzw. der Beleuchtungsstärke E . Entsprechend haben wir beim Fernrohr auch 3 Arten von *Nutzleistungen* zu unterscheiden. Diese sind, sofern wir jedesmal die Nutzleistung durch das Verhältnis des Schwellenwertes für das unbewaffnete Auge zu dem beim Gebrauch des Fernrohrs definieren:

$$L_{\sigma} = \frac{\sigma_A}{\sigma_F}; \quad L_K = \frac{K_A}{K_F}; \quad L_B = \frac{B_A}{B_F}.$$

Die *angularäre Sichtungsschwelle* ist nach (1) bzw. nach (17):

$$\sigma_A = \frac{\sqrt{\frac{\varphi(B)}{B}}}{\sqrt{K} - \sqrt{\frac{b(B)}{B}}}; \quad \sigma_F = \frac{\frac{1}{F} \sqrt{\frac{\varphi(\mu B)}{\mu B}}}{\sqrt{\frac{v}{\mu} K} - \sqrt{\frac{b(\mu B)}{\mu B}}}. \quad (21)$$

Hieraus folgt für die entsprechende Leistungsgröße¹:

$$L_{\sigma} = F \sqrt{\frac{\mu \cdot \varphi(B)}{\varphi(\mu B)}} \frac{\sqrt{\frac{v}{\mu} K} - \sqrt{\frac{b(\mu B)}{\mu B}}}{\sqrt{K} - \sqrt{\frac{b(B)}{B}}}. \quad (21a)$$

Zur Orientierung ist zunächst in Abb. 2 für den Fall $K = +1$ eine Darstellung der nach (21) berechneten Schwinkelschwellen, ihrer reziproken Werte und der nach (21a) bestimmten Nutzleistung eines speziellen Fernrohrs wiedergegeben. Die Ordinaten der Kurve L_{σ} geben an, durch welchen Zahlenwert die Sichtungsschwellen σ_A des unbewaffneten Auges dividiert werden müssen, um die Schwellen σ_F bei Benutzung des Fernrohrs zu erhalten. An der Stelle, wo die Augenspille gleich der Austrittspille des Fernrohrs wird, erfährt die Kurve L_{σ} eine scharfe Umbiegung, die dadurch bedingt wird, daß dort die Abhängigkeit der Leistung von $(D_{EP})_F : (D_{EP}^*)_A$ in eine solche von Γ wechselt. Für größere Kontraste als $+1$ liegen wohl die Werte σ_A und σ_F beide tiefer als in Abb. 2 dargestellt, aber die Lage der Leistungskurve L_{σ} bleibt selbst für $K \rightarrow \infty$ im ganzen Leuchtdichtebereich

¹ WEMPE, J.: Z. Instrumentenkde. 64, 71 (1944), hat als Nutzleistung des Fernrohrs die Größe $L_{\sigma} : \Gamma$ definiert, was mir weniger treffend erscheint.

nahezu unverändert. Für wesentlich kleinere Kontraste hingegen, namentlich unterhalb $K = 0,5$, steigt die Schwelle σ_F im Bereiche kleiner Leuchtdichten viel stärker an als die Schwelle σ_A ; daher bleibt für solche kleinen Kontraste die Nutzleistung L_σ im Bereiche kleiner Leuchtdichten erheblich hinter der in Abb. 2 dargestellten zurück und nähert sich erst im Bereiche größerer Leuchtdichten wieder dem dort verzeichneten Verlauf.

Allgemein folgt aus der Beziehung (21 a): Solange die Austrittspupille des Fernrohrs kleiner bleibt als die Augenpupille — was beim Nachtsehen zumeist die Regel ist —, wächst die Fernrohrleistung hinsichtlich der Schwinkelschwelle mit dem Durchmesser des Fernrohrobjektivs und ist von der Vergrößerung des Fernrohrs ganz unabhängig. Von derjenigen Leuchtdichte aufwärts, bei welcher der Durchmesser der Augenpupille gleich dem Durchmesser der Fernrohraustrittspupille wird oder sie unterschreitet, geht die Nutzleistung L_σ proportional mit der Fernrohrvergrößerung und wird von sämtlichen Pupillen explizit

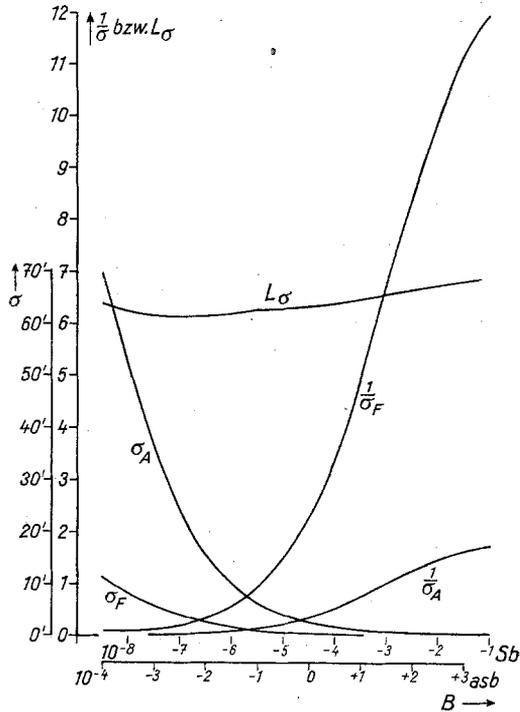


Abb. 2. Schwinkelschwellen und Nutzleistung für den Kontrast $K = + 1$. Fernrohr: 7×50 ; $\mu = 0,78$; $\nu/\mu = 0,986$.

unabhängig. Der zweite Faktor in (21 a) trägt der Minderung der Leistung infolge der durch $\mu < 1$ bedingten Schwächung der Lichtströme Rechnung. Wie aus der Tabelle 1 e ersichtlich ist, hat dieser Faktor bei $10^{-5} S_b \approx 10^{-0,5} asb$ ein Minimum, das ist im Übergangsbereich vom Zapfensehen zum Stäbchensehen. Der letzte Faktor in (21 a) schließlich beschreibt die Minderung der Nutzleistung infolge der Herabsetzung der Kontraste beim Sehen durch das Fernrohr. $\frac{\nu}{\mu} K$ im Zähler ist immer kleiner als K im Nenner; andererseits ersieht man aus Tabelle 1 d, daß $\sqrt{\frac{b(\mu B)}{\mu B}}$ immer größer ist als $\sqrt{\frac{b(B)}{B}}$. Daher wird der letzte Faktor in (21 a) um so kleiner, je geringer die Durchlässigkeit μ ist. Für große Kontraste nähert sich der Wert dieses Faktors dem Betrage $\sqrt{\nu/\mu}$. Diese Grenze wird aber,

wie wir im weiteren noch sehen werden, praktisch schon bei ganz mäßigen Kontrasten erreicht. Für den Kontrast

$$K = \frac{b(\mu B)}{\nu B} \tag{22}$$

sinkt die Nutzleistung des Fernrohrs auf Null. Schon, wenn L_σ unter den Wert 1 fällt, führt die Sichtung mit freiem Auge weiter als die

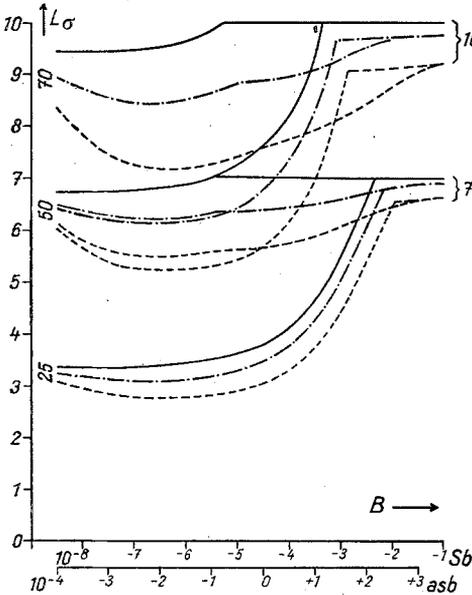


Abb. 3.

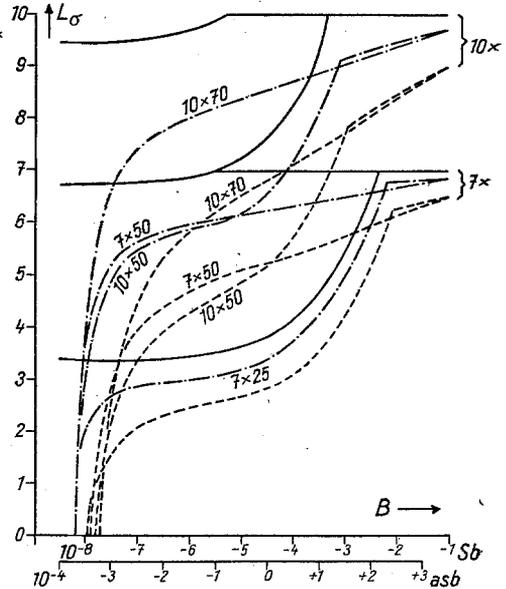


Abb. 4.

Abb. 3. Schwinkel-Nutzleistung verschiedener Fernrohre für große Kontraste. — vollkommen lichtdurchlässig; - - - vergütete Flächen; ····· nichtvergütete Flächen. $(D_{EP}^*)_A$ entsprechend (19) mit den Konstanten (19a) unter Berücksichtigung von μ .

$\Gamma \times (D_{EP})_F$	vergütet		nichtvergütet		$\Gamma \times (D_{EP})_F$	vergütet		nichtvergütet	
	μ	ν/μ	μ	ν/μ		μ	ν/μ	μ	ν/μ
10 × 70	0,74	0,976	0,53	0,895	7 × 50	0,78	0,986	0,60	0,925
10 × 50	0,76	0,978	0,55	0,903	7 × 25	0,80	0,987	0,62	0,933

Abb. 4. Schwinkel-Nutzleistung derselben Fernrohre wie in Abb. 3, aber für den Kontrast $K = +0,10$.

Benutzung des Fernrohrs. Solche Verhältnisse können für kleine Kontraste im Bereiche sehr kleiner Leuchtdichten auftreten.

In Abb. 3 und 4 sind die vorstehend geschilderten Verhältnisse an 4 Fernrohren, denen mittlere Eigenschaften zugrunde gelegt wurden, veranschaulicht, und zwar wieder unter der Annahme einer Pupillenzuordnung gemäß (19) und (19a). Die Abb. 3 ist von vornherein nur für sehr große Kontraste berechnet; aber selbst für $K = 1$ würde der

Verlauf der Kurven nur im Bereiche kleinster Umfeldleuchtdichten, und auch dort nur kaum merklich, anders sein. Stärkere Änderungen treten erst ein, wenn der Kontrast erheblich unter dem Wert 0,5 liegt. Die Nutzleistung fällt dann im Bereiche kleinster Umfeldleuchtdichten in starker Abhängigkeit von K rasch ab. Für $K = 0,1$ (Abb. 4) sinkt die Leistung in der Nähe von 10^{-8} Sb auf den Wert 1 und darunter, und zwar für die Fernrohre mit nicht vergüteten Flächen deutlich früher als bei den anderen.

Übereinstimmend ersieht man aus den Abb. 3 und 4: Im Nachtsehen laufen, abgesehen von den durch die Lichtdurchlässigkeit bedingten geringen Unterschieden, die Leistungskurven für gleiche Eintrittspupillen, im Tagsehen dagegen die für gleiche Vergrößerungen zusammen. Der Nutzeffekt der Vergütung ist um so größer, je höher schon die Nutzleistung des unvergüteten Fernrohrs war, und erweist sich besonders groß, wenn kleine Kontraste beobachtet werden müssen. Die undefinierte Pupillenzuordnung macht zwar den Verlauf der Leistungskurven, hauptsächlich im Bereiche kleinster Leuchtdichten, etwas unsicher, ändert aber an den vorstehenden prinzipiellen Feststellungen nichts.

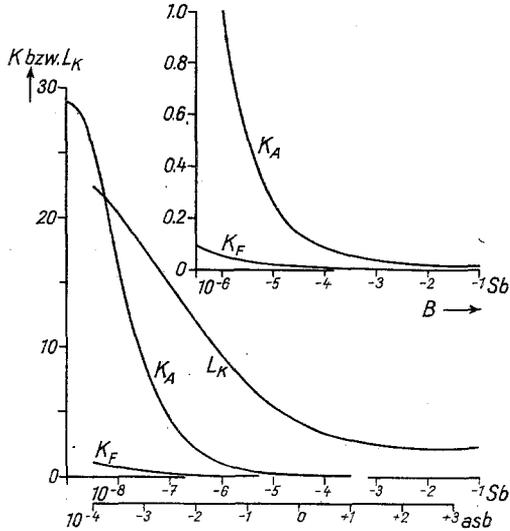


Abb. 5. Kontrastschwellen und Nutzleistung für $\sigma = 10'$. Fernrohr wie in Abb. 2.

Für die Kontrastschwellen folgt aus (1) bzw. aus (17):

$$\left. \begin{aligned} K_A &= \frac{1}{B} \left\{ \frac{1}{\sigma} \sqrt{\varphi(B)} + \sqrt{b(B)} \right\}^2 \\ K_F &= \frac{1}{\nu B} \left\{ \frac{1}{\sigma F} \sqrt{\varphi(\mu B)} + \sqrt{b(\mu B)} \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

und für die entsprechende Nutzleistung des Fernrohrs:

$$L_K = \nu \left\{ \frac{\frac{1}{\sigma} \sqrt{\varphi(B)} + \sqrt{b(B)}}{\frac{1}{\sigma F} \sqrt{\varphi(\mu B)} + \sqrt{b(\mu B)}} \right\}^2 \quad (23 a)$$

Wir betrachten auch hier zunächst ein einzelnes Beispiel (Abb. 5). L_K verhält sich durchaus anders als L_σ , da die Abhängigkeit der Leistung

von F und B in beiden Fällen eine andere ist. Für Objekte von sehr kleinen angulären Ausmaßen wird

$$(L_K)_{\sigma \ll} = F^2 v \frac{\varphi(B)}{\varphi(\mu B)}, \quad (24)$$

die Nutzleistung also proportional zur *Fläche* der Eintrittspupille bzw. für $(D_{AP})_F \geq (D_{EP})_A$ proportional zum Quadrat der Vergrößerung.

Bei sehr großen Objekten ist der Grenzwert der Leistung:

$$(L_K)_{\sigma \gg} = v \frac{b(B)}{b(\mu B)}. \quad (24a)$$

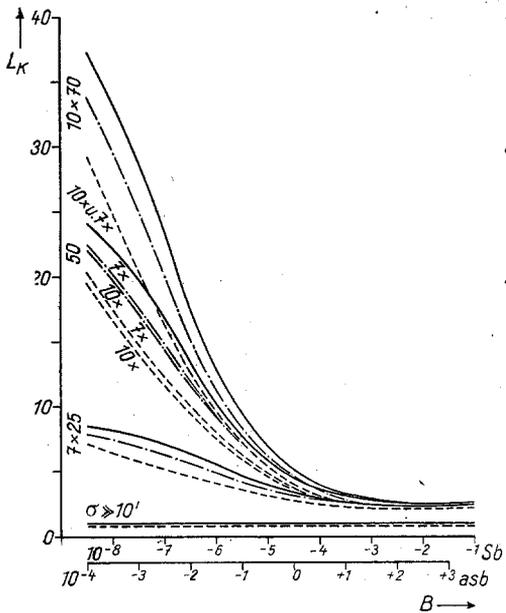


Abb. 6. Kontrastschwellen-Nutzleistung derselben Fernrohre wie in Abb. 3, für $\sigma = 10'$ und $\sigma \gg 10'$.

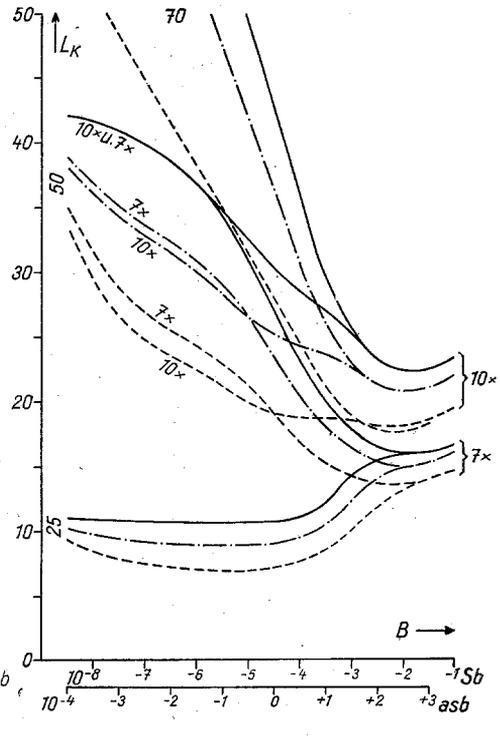


Abb. 7. Wie Abb. 6, aber für $\sigma = 1'$.

Da letztere Größe wegen $\mu < 1$ auch selbst immer kleiner als 1 bleibt, werden sehr große Objekte unter allen Beleuchtungsverhältnissen besser ohne Fernrohr gesichtet, übrigens eine bekannte Erfahrungstatsache.

In den Abb. 6 und 7 sind für dieselben Fernrohre wie in Abb. 3 die Kontrastschwellennutzleistungen L_K wieder als Funktion von B dargestellt. Betrachten wir zunächst Abb. 6 ($\sigma = 10'$ und $\sigma \gg 10'$). Bei sehr großen Schwinkeln ist der Nutzwert für ideal lichtdurchlässige Fernrohre gleich 1, also gleich der Leistung des unbewaffneten Auges, für nicht vollkommen durchlässige Gläser etwas niedriger als 1 (0,8 bis 0,95). Auch für Schwinke von $10'$ verhalten sich im Tagessehen die

einzelnen Fernrohre noch wenig unterschiedlich; die Kontrastnutzleistung liegt hier etwas über dem Wert 2. Noch im Übergang zur Dämmerung sind die Leistungen der einzelnen Fernrohre verhältnismäßig wenig differenziert. So ist bei 10^{-5} Sb der Unterschied der Leistungen für Fernrohre mit Objektiven von 50 und 70 mm Öffnung noch kaum beachtlich, wenn auch gegenüber den Fernrohren mit nur 25 mm Objektivöffnung dort schon deutlich unterschieden. Erst im Bereich des Nachtsehens wird für die Fernrohre mit größerer Eintrittspupille die Leistung immer überragender. Diese Verhältnisse ändern sich noch zunehmend, je mehr die anguläre Objektgröße abnimmt. Für $\sigma = 1'$ (Abb. 7) sind schon bei 10^{-5} Sb die Nutzleistungen für Fernrohre mit Objektiven von 50 und 75 mm Öffnung stark unterschieden. Ihre Leistungswerte laufen erst im Tagsehen bei 10^{-3} Sb zusammen. Auch aus diesen Abbildungen wird deutlich: Die Vergütung wirkt um so stärker, je größer die Leistung schon vorher war.

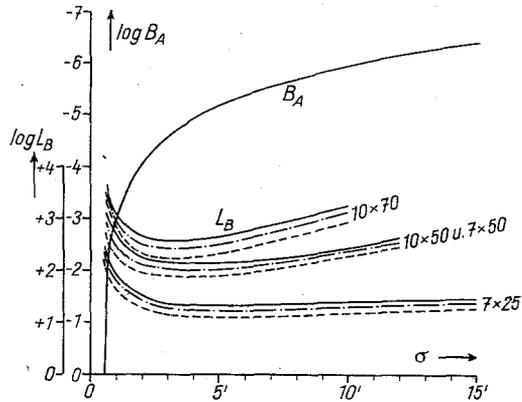


Abb. 8. Leuchtdichteschwellen und Nutzleistung derselben Fernrohre wie in Abb. 3, für $K = +1$.

Die *Leuchtdichteschwellen* bzw. die Schwellen der Beleuchtungsstärke lassen sich aus (1) bzw. (17) nicht explizit darstellen, da B in komplizierter Weise in den Funktionen φ und b enthalten ist. Man kann aber mit den früher¹ gegebenen Entwicklungen von φ und b leicht zu folgenden *ersten Näherungen* der Schwellen B gelangen:

$$B_A \approx \frac{10^{-3}}{\{\sigma \sqrt{K}\}^3}; \quad B_F \approx \frac{10^{-3}}{\mu \left\{ \sigma F \sqrt{\frac{\nu}{\mu} K} \right\}^3}. \quad (25)$$

Hierin ist B in Sb und σ in min auszudrücken. Die Näherung für B_A ist weit vollkommener als die für B_F , weil in letztere noch $(D_{EP}^*)_A$ eingeht. Es darf die Nutzleistung L_B nicht unmittelbar aus diesen Näherungen berechnet werden; denn sie würde dann unabhängig von K und von σ sein, was in Wirklichkeit nicht zutrifft. Vielmehr sind die Näherungen (25) nur dazu zu verwenden, um mit ihrer Hilfe schneller die genaueren Werte der Schwellen zu finden, welche den Beziehungen (1) und (17) genügen. Erst aus den korrigierten Werten darf die Leistungsgröße berechnet werden.

¹ BERK, M.: Z. Instrumentenkde. 63, 297 (1943).

In den Abb. 8 und 9 sind zu $K = 1$ bzw. $K = 0,1$ die Leuchtdichteschwellen B_A für das unbewaffnete Auge und außerdem für dieselben Fernrohre wie früher die Nutzleistungen L_B in Abhängigkeit vom Sehwinkel dargestellt. Die Ordinaten zu L_B geben den Zahlenwert, durch den man B_A dividieren muß, um die Schwelle B_F zu erhalten. Auch hier bleiben die Leistungskurven (nicht jedoch die Kurve B_A) für beliebige Kontraste > 1 praktisch unverändert. Merkliche Änderungen treten erst für Kontraste, die wesentlich unter 1 liegen, auf. In der Abb. 8 umfaßt das Tagsehen, wie aus den Ordinaten der Kurve B_A zu ersehen

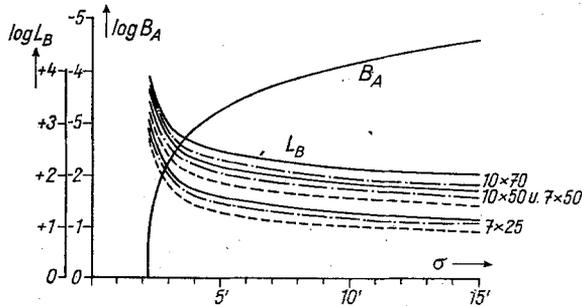


Abb. 9. Wie Abb. 8, aber für $K = +0,10$. An der Ordinate lies -3 statt -5 .

ist, nur den Bereich der kleinsten Sehwinkel, dort wo die Leistungskurve stark ansteigt; in Abb. 9 dagegen betrifft das Tagsehen bereits etwa die halbe Ausdehnung der Abszissenskala.

Experimentelle Befunde.

Wie schon erwähnt, kann für das unbewaffnete Auge das allgemeine Wahrnehmungsgesetz (1) durch die Summe der Erfahrungen als erwiesen gelten. Zur Prüfung der Folgerungen, die sich daraus für den Gebrauch binokularer Fernrohre ergeben, steht in der Literatur leider nur das wenige Material zur Verfügung, das vor kurzem J. WEMPE¹ über Sichtungsschwellen mit Fernrohren veröffentlicht hat. Es bezieht sich auf Laboratoriumsversuche an Kreisscheibentesten, die bei relativ kleinen Dingweiten (zwischen 6 und 13 m) durchgeführt wurden, und betrifft die Messung von Sehwinkelschwellen für sechs verschiedene Beobachter. Die Beschränkung auf *Sehwinkelschwellen* ist prinzipiell belanglos, da sich ja alle 3 Arten von Schwellen aus demselben Gesetz durch einfache Umstellung ableiten. Die in den ersten 6 Spalten von Tabelle 3 mitgeteilten Daten entsprechen den Angaben des Autors. Der Schwankungsbereich der Leistungen (Spalte 5) ist ziemlich beträchtlich. Es handelt sich dabei wohl kaum nur um individuell bedingte Unterschiede, sondern um eine allgemeine Unsicherheit der Messungen;

¹ WEMPE, J.: Z. Instrumentenkde. 64, 71 (1944).

denn selbst für einen und denselben Beobachter (den in der Originalarbeit mit M. bezeichneten) hat man nach den von J. WEMPE mitgeteilten Tabellen die sehr unterschiedlichen Werte:

Fernrohr:	6×30	7×50	15×60		
L_σ	{	3,3	4,8	5,5	aus J. WEMPE ¹ S. 78.
		4,6	6,4	8,2	aus J. WEMPE ¹ S. 76 für
					$\log B = -2,52$ zu entnehmen.

Ich habe daher zu den Mittelwerten in Spalte 6 noch in der Spalte 7 die durchschnittliche Streuung der Messungen hinzugefügt. Nur in diesen Grenzen wird man gegebenenfalls eine Übereinstimmung zwischen den experimentellen Befunden und der Theorie erwarten dürfen. In Spalte 8 stehen die von J. WEMPE selbst nach einer Formel von A. KÜHL² berechneten Leistungswerte für diese Fernrohre. Sie geben zwar den *Gang*, aber nicht die *Beträge* von L_σ richtig wieder. Die Spalten 9 bis 11 beziehen sich auf die Anwendung unserer Formeln. Die Werte ν/μ in Spalte 9 sind nach bekannten Verhältnissen in ähnlichen Fernrohren geschätzt und dürften sich nur um belanglose Beträge von den wahren Werten unterscheiden. In den Spalten 10 und 11 stehen die Leistungswerte, nach Formel (21a) berechnet, und zwar in 10 unter Zuordnung der Pupillenweiten gemäß (19) mit den Konstanten (19a), was unter Berücksichtigung von μ auf $(D_{EP}^*)_A = 7,4$ mm führt. Schon diese Leistungswerte fallen gut in den Schwankungsbereich der Spalte 5 und stimmen unter Berücksichtigung der in Spalte 7 angegebenen Streuungen mit den Mittelwerten in Spalte 6 befriedigend überein. Noch besser wird die Übereinstimmung, wenn man die Augenpupille etwas kleiner annimmt, als den Konstanten (19a) entspricht; Spalte 11 gibt die Ergebnisse der Rechnung für $(D_{EP}^*)_A = 6,5$ mm. In Anbetracht der erheblichen Unsicherheiten, mit denen sowohl die Messungen, wie auch die Berechnungen behaftet sind, kann man mit dieser Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie zufrieden sein.

In besonderer Freundlichkeit hat mir vor einigen Jahren Herr K. MARTIN (†) (E. BUSCH AG., Rathenow) eine Serie im Freien durchgeführter Messungen zur Verfügung gestellt. Der Versuch, diese Messungen zu deuten, wurde für mich seinerzeit der Anlaß zu dieser Untersuchung. In der Tabelle 4 sind in den ersten 4 Spalten die Eigenschaften der von K. MARTIN benutzten Fernrohre mitgeteilt. μ wurde auch hier photometrisch gemessen. In den Spalten 5 sind die bei 10^{-2} asb und bei 10^{-1} asb gemessenen Nutzleistungen für Schwellenschwellen dieser Fernrohre vermerkt; sie sind aber hier nicht auf das unbewaffnete Auge bezogen, sondern auf eine willkürliche, vom Autor

¹ WEMPE, J.: Z. Instrumentenkde. 64, 71 (1944).

² KÜHL, A.: Phys. Z. 37, 912 (1936).

Tabelle 3. Prüfung der Theorie an Messungen von J. WEMPE. $K = 0,97$; $B = 0,003$ asb $= 10^{-7,02}$ Sb.

1	2	3	4	5		6		7	8	9	10		11
				$(D_{EP})_F$	Γ	μ	L_σ gemessen				L_σ berechnet		
Schwankungen	Mittelwert	Durchschnittliche Streuung	L_σ nach A. KÜHL berechnet				ν/μ	$(D_{EP})_A$ $= 7,4$ mm	$(D_{EP})_A$ $= 6,5$ mm				
			6 X 30	30,0	5,87	0,56				2,9—5,2	3,7	$\pm 0,7$	5,0
8 X 40	39,0	7,75	0,48	3,6—5,6	4,3	$\pm 0,6$	6,7	0,88	3,7	4,2			
7 X 50	49,0	6,79	0,68	4,1—6,4	5,2	$\pm 0,8$	7,0	0,95	5,6	5,7 ¹			
10 X 50	48,0	9,66	0,50	4,7—6,7	5,6	$\pm 0,6$	8,4	0,89	4,7	5,3			
15 X 60	58,0	15,14	0,54	5,1—8,2	6,7	$\pm 1,0$	11,3	0,90	5,9	6,7			

¹ Die bei diesem Fernrohr nur geringe Veränderung gegenüber der vorletzten Spalte erklärt sich daraus, daß für $(D_{EP})_A = 6,5$ mm die Austrittspupille des Fernrohrs bereits größer ist als die Augenpupille.

Tabelle 4. Prüfung der Theorie an Messungen von K. MARTIN. $K = 0,43$; $B = 10^{-2}$ asb und 10^{-1} asb.

1	2	3	4	5	6		7	8	9				
					$(D_{EP})_F$	k				μ	$(L_\sigma) = q : \sigma_F$ gemessen		$L_\sigma = \sigma_A : \sigma_F$ nach (21 a) berechnet
10^{-2} asb	10^{-1} asb	10^{-2} asb	10^{-1} asb										
6	30	10	0,59	810	2080	0,924	3,15	3,20	257	650	2,53	28,2 ¹ :11,2 ¹	
6	36	12	0,54	880	2440	0,895	3,49	3,61	252	676	2,68	= 2,52	
7	50	10	0,58	1210	3580	0,924	5,14	5,29	235	677	2,88		
8	56	4 ¹	0,79	1600	4470	0,987	6,87	7,06	233	633	2,72		
10	60	12	0,52	1530	3800	0,895	5,75	5,93	266	641	2,41		
10	80	12	0,51	1740	4370	0,895	6,99	7,04	249	624	2,49		
12	72	12	0,52	1860	4670	0,895	6,90	7,12	270	696	2,43		
Mittel:										252	651	2,59	
Durchschnittliche Streuung:										± 11	± 16	$\pm 0,14$	

¹ Galilei-Glas.

dieser Messungen nicht näher bezeichnete Einheit q , die jedoch für alle Messungen die gleiche war. Spalte 6 gibt den Nutzfaktor ν/μ der Durchlässigkeit, nach den Formeln (18) unter Berücksichtigung der Flächenzahl k in diesen Fernrohren und mit einem mittleren Brechungsindex $n = 1,55$ berechnet; in den Spalten 7 stehen die Nutzleistungen L_σ , nach (21a) berechnet, wobei zur Bestimmung von $(D_{EP}^*)_A$ wieder die Beziehungen (19) und (19a) unter Berücksichtigung von μ benutzt wurden. Diese Leistungswerte in den Spalten 7 sind, im Gegensatz zu denen in den Spalten 5, auf die Sehschwellen mit unbewaffnetem Auge bezogen. Wenn zwischen den Messungen und den Berechnungen Übereinstimmung bestehen soll, muß sich aus den Zahlen in den Spalten (5) und (7)

$$(L_\sigma) : L_\sigma = \frac{q}{\sigma_F} : \frac{\sigma_A}{\sigma_F} = \frac{q}{\sigma_A}$$

ergeben und für alle bei derselben Umfeldleuchtdichte ausgeführten Messungen konstant sein. Diese Quotienten sind in den Spalten 8 eingetragen. Wenn man die Schwierigkeiten solcher Messungen beachtet, muß man die Übereinstimmung dieser Quotienten innerhalb jeder der beiden Spalten 8 eine geradezu gute zu nennen. Man kann aber noch eine weitere Prüfung machen: Dividiert man die Werte in den beiden Spalten 8 je zeilenweise durcheinander, bildet man also

$$\left(\frac{q}{\sigma_A}\right)_{10^{-1} \text{ asb}} : \left(\frac{q}{\sigma_A}\right)_{10^{-2} \text{ asb}} = \frac{(\sigma_A)_{10^{-2}}}{(\sigma_A)_{10^{-1}}},$$

so erhält man die Zahlen in der ersten Vertikalreihe der Spalte 9. Diese müssen mit dem Verhältnis der Schwinkelschwellen übereinstimmen, die bei diesen beiden Umfeldleuchtdichten für das unbewaffnete Auge gelten, und die sich unmittelbar aus der ersten Beziehung in (24) berechnen lassen. Dies bedeutet eine sehr scharfe Prüfung. Ihr Ergebnis wird aus der letzten Spalte ersichtlich; für den Mittelwert aus der ersten Vertikalreihe in Spalte 9 ist unter Berücksichtigung der Fehlergrenze die Übereinstimmung mit dem Quotienten der nach (24) berechneten Schwinkelschwellen sogar eine so gut wie vollkommene.

Dieses offenbar sehr sorgfältig durchgeführte Beobachtungsmaterial erweist eindeutig, daß unsere Leistungsformel, zum mindesten bis auf einen Proportionalitätsfaktor (der sich bei den Quotientbildungen herausgehoben hat) die Verhältnisse richtig darstellt; dieser Proportionalitätsfaktor muß für alle Fernrohre und auch für die verschiedenen Umfeldleuchtdichten denselben Wert haben. Daß er gleich 1 angenommen werden kann, dürfte die Anwendung unserer Leistungsformel auf die von J. WEMPE ausgeführten Messungen wahrscheinlich gemacht haben. Daher kann unsere Leistungsformel im wesentlichen als vollständig gelten.

Einen Umstand haben wir bei unseren Betrachtungen ganz außer acht gelassen: Wir haben von den Aberrationen der Fernrohre und des Auges abgesehen. Beim Sehen in der Dunkelheit sind namentlich die Aberrationen des Auges nicht unbeträchtlich. Es ist bekannt, daß bei weit geöffneten Pupillen Fehler der Strahlenvereinigung im Sinne starker Unterkorrektion auftreten, so daß hierdurch der beste Bildort innerhalb des Auges näher gegen die Augenlinse hin verschoben ist. Es macht dies beim Nachtsehen eine Akkommodationsänderung bis zu $-1\frac{1}{2}$ Diptr. notwendig. In der Praxis korrigiert man diesen Betrag zumeist durch eine Veränderung der Okulareinstellung. Man muß sich jedoch darüber klar sein, daß auf diese Weise zwar die Bildortverschiebung ausgeglichen wird, aber nicht die Aberrationen beseitigt werden, vielmehr das Bild immer weniger scharf bleibt als im Tagsehen. Diesen Umständen kommt wohl dann eine Bedeutung zu, wenn es sich um eigentliche Sehschärfebeanspruchungen des Auges handelt, aber wohl weniger bei der Feststellung von Sichtungsschwellen. Übrigens könnte man die Fernrohre, um diesen Aberrationen des Auges entgegenzuwirken, im Bereiche größerer Austrittspupillen von vornherein entsprechend überkorrigieren. Es ist mir nicht bekannt, ob dieses Verfahren schon bewußt angewandt worden ist.
