DIE NATURWISSENSCHAFTEN

WOCHENSCHRIFT FÜR DIE FORTSCHRITTE DER NATURWISSENSCHAFT, DER MEDIZIN UND DER TECHNIK

HERAUSGEGEBEN VON

DR. ARNOLD BERLINER UND PROF. DR. AUGUST PÜTTER

Neunter Jahrgang. | 29. April 1921. | Heft 17.

Treue Darstellung und Verzeichnung bei optischen Instrumenten.

Von H. Boegehold, Jena.

Man betrachte eine ebene Zeichnung mit *einem* Auge. Die senkrechte Entfernung sei e, der Abstand einzelner Punkte der Zeichnung vom Einfall des Lotes betrage $y_1, y_2, \ldots.$ (Fig. 1.) Dann erscheint dieser Abstand dem Auge unter dem Winkel w_1, w_2 (der scheinbaren Größe), wobei

$$\operatorname{tg} w_1 = \frac{y_1}{e},\ \operatorname{tg} w_2 = \frac{y_2}{e}, \ldots\ldots$$

Die Winkel w wird man nur, wenn sie sehr klein sind, bei ruhendem Auge durch Größen auf der Netzhaut, sonst durch die Bewegung des Auges um seinen Drehpunkt empfinden (*M. v. Rohr 4*, 22—25)[1]).

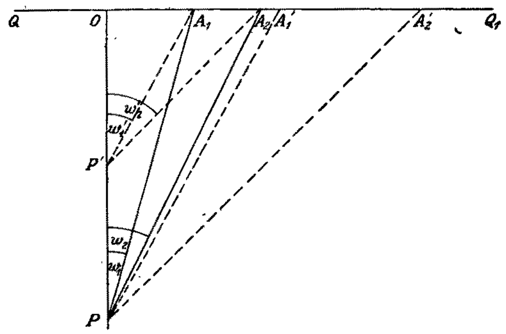

Fig. 1. Das Auge betrachte von P aus eine Zeichnung, deren Ebene zur Papierebene senkrecht stehe und diese in $QOA_1A_2Q_1$ schneide. $PO = e$ sei der senkrechte Abstand. A_1, A_2 seien zwei Punkte der Zeichnung; ihre Lage, mit O in einer Geraden, ist nur der Bequemlichkeit halber angenommen. Die Strecken $OA_1 = y_1$, $OA_2 = y_2$ erscheinen von P aus unter den Winkeln $OPA_1 = w_1$ und $OPA_2 = w_2$; wobei $\operatorname{tg} w_1 = y_1/e$; $\operatorname{tg} w_2 = y_2/e$ (Betrachtungen über die Vorzeichen der Winkel und Strecken sind in der ganzen Arbeit nicht nötig). Geht das Auge nach P', wobei $P'O = e'$, so erhält man für die Sehwinkel $\operatorname{tg} OP'A_1 = \operatorname{tg} w_1' = y_1/e'$, $\operatorname{tg} OP'A_2 = \operatorname{tg} w_2' = y_2/e'$. Bleibt das Auge in P, betrachtet aber eine im Verhältnis e/e' vergrößerte Zeichnung, in der A_1', A_2' den Punkten A_1, A_2 entsprechen, so ist auch $OPA_1' = w_1'$, $OPA_2' = w_2'$. (Angenommen ist $e/e' = 2$.)

Bei einer anderen Entfernung e' wird der Winkel kleiner oder größer:

$$\operatorname{tg} w_1' = \frac{y_1}{e'},\ \operatorname{tg} w_2' = \frac{y_2}{e'}, \ldots\ldots$$

Das nämliche kann man erreichen, wenn man, statt e zu ändern, die Figur, also $y_1, y_2, \ldots.$ im Verhältnis $\frac{e}{e'}$ verändert. Endlich kann man sowohl e durch e' als auch die Zeichnung durch eine im Verhältnis β vergrößerte (verkleinerte) ersetzt denken, man hat dann:

$$\operatorname{tg} w_1' = \frac{\beta\, y_1}{e'},\ \operatorname{tg} w_2' = \frac{\beta\, y_2}{e'} \ldots\ldots$$

und daher allgemein:

$$\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \frac{\beta\, e}{e'} = \text{const.} \quad \ldots\ldots \quad (1$$

als Bedingung, daß man eine ähnliche Zeichnung des ersten Gegenstandes betrachtet, und ein bestimmter Punkt, der Ausgangspunkt der y, auf einer durch das Auge (den Augendrehpunkt) gehenden, zur verschobenen Ebene senkrechten Linie liegt. Für $\beta = \frac{e'}{e}$ ist $w = w'$, und die beiden Zeichnungen machen auf das Auge den nämlichen Eindruck.

Man habe nun einen räumlichen Gegenstand oder auch eine Zeichnung auf einer krummen Fläche, und es sei dem Maler oder Architekten die Aufgabe gestellt, ihn auf einer Ebene treu darzustellen. Er wird sich von einem Punkte (dem Perspektivitätszentrum) Linien nach den Punkten des Gegenstandes gezeichnet denken und ihre Schnittpunkte mit der Darstellungsebene bestimmen. Betrachtet man die so entstandene Zeichnung vom Perspektivitätszentrum aus oder eine β-fach vergrößerte Zeichnung von β-facher Entfernung, so ist in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$w'' = w.$$

Man hat daher eine ebene Figur, die den Gegenstand in bezug auf alle scheinbaren Größen vollständig vertritt. Kennt man die wirklichen Größen, so kann durch einen unwillkürlichen Schluß eine „plastische" Vorstellung mit richtigem Tiefenverhältnis entstehen[2]).

Geht man nun an die Zeichnung näher heran oder entfernt sich von ihr, so gilt offenbar die

[1]) Die kursivgedruckten Zahlen in den Anführungen beziehen sich auf das Quellenverzeichnis am Ende des Aufsatzes.

[2]) Vor wirklicher Verwechslung einer Zeichnung mit einem räumlichen Gegenstande mag den geübten Beobachter der fehlende Akkommodationsunterschied, noch mehr bei beidäugiger Betrachtung der fehlende stereoskopische Eindruck schützen, für den ungeübten ist das Miterscheinen des Rahmens oder der sonstigen Umgebung des Bildes der Hauptschutz. Wird diese Störung durch geschickte Anordnung ausgeschaltet, so kann eine kunstvolle Zeichnung bei der Mehrzahl der Betrachtenden leicht die Täuschung eines Körpers hervorrufen. Bekannte Beispiele findet man in Berlin (Zoologischer Garten) und Fulda (Orangerie).

Gleichung (1), wenn man für w jetzt den Winkel bei Betrachtung des räumlichen Urbilds, für w' den Winkel bei Betrachtung der Zeichnung nimmt. Gleichung (1) ist also eine Beziehung, die eine richtige Nachbildung kennzeichnet und auch dann bestehen bleibt, wenn man diese aus den verschiedensten Entfernungen ansieht, nur darf man sie nicht im Vergleich zum Kopfe drehen.

Die Wiedergabe kann aber dann nicht die Stelle des räumlichen Urbildes vertreten. — Durch Annäherung oder Entfernung würden sich bei diesem nämlich nicht alle scheinbaren Größen in derselben Weise, sondern die der näheren Teile verhältnismäßig stärker ändern. — Infolge dieses Unterschiedes zwischen Gegenstand und Nachbildung erscheint die letztgenannte in unrichtiger (und aus psychologischen Gründen weniger lebhafter) Plastik (s. *M. v. Rohr 4*, 27). (Vgl. Fig. 2.)

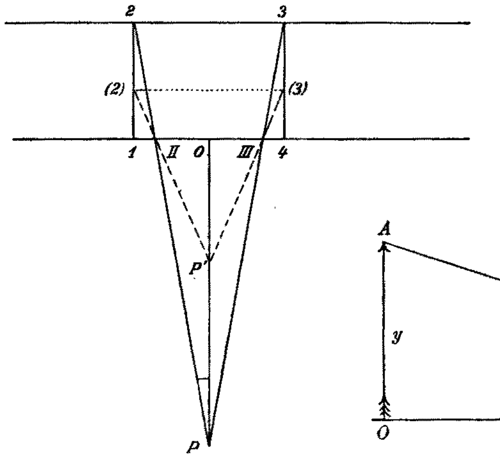

Fig. 2. Ein räumlich ausgedehnter Gegenstand, der die Ebene des Papiers in den Ecken des Rechtecks 1 2 3 4 schneide, ist von P aus auf die um $PO = e$ entfernte Ebene projiziert, um möglichst einfache Verhältnisse zu haben, möge 1 0 4 eine Gerade und $1\,O = O\,4$ sein. Den Punkten 2 und 3 entsprechen in der Projektion II und III. — Betrachtet man nach Fortnahme des Gegenstandes die so entstandene Zeichnung von der Entfernung $PO = e$ aus oder eine β-fach vergrößerte von β-facher Entfernung, so ist z. B. $\sphericalangle\, 2\,PO = \mathrm{II}\,PO$, die Zeichnung vertritt also in bezug auf den Sehwinkel völlig den Gegenstand. — Geht man jedoch nach P', so wird der Sehwinkel für die Betrachtung der Zeichnung sich nach Gl. (1) ändern, während beim Betrachten des räumlichen Gegenstandes ein anderes Gesetz gelten würde. Faßt man also die Zeichnung überhaupt plastisch auf, so muß man die Punkte 2, 3 in die Richtungen P'II, P'III verlegen; wenn sich also das Vorstellungsvermögen beispielsweise an die anderweitig bekannte rechteckige Lage von 1 2 3 4 hält, so wird die Auffassung eines viel flacheren Rechtecks 1 (2) (3) 4 entstehen.

Bei einem optischen Werkzeuge wird die Zeichnung nicht durch Zeichenstift oder Pinsel, sondern durch die Lichtstrahlen selbst hervorgebracht. — Bei der Lochkamera entsteht auf der Hinterwand eine Darstellung, indem jedem Punkte der Außenwelt ein kleines Lichtscheibchen entspricht, dessen Mitte auf der Verbindungslinie des dargestellten Punktes mit der Mitte des Loches liegt. — So unvollkommen diese Wiedergabe vom optischen Standpunkte aus ist, leistet sie, was die Treue der Zeichnung angeht, alles zu verlangende, weil sie einfach durch perspektivische Darstellung entsteht, es gilt ohne weiteres die Gleichung (1) (s. Fig. 3). Betrachtet man eine gezeichnete oder photographierte durch die Lochkamera erhaltene Darstellung aus einer Entfernung, die gleich der Tiefe der Kammer ist, so stimmt auch die plastische Wirkung (Über die Lochkamera vgl. *O. Lummer 1*, 211—213).

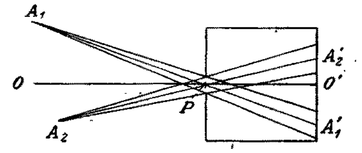

Fig. 3. Entstehung der Wiedergabe eines Gegenstandes durch eine Lochkamera. P Mitte des Lochs, $A_1'A_2'$ die Hinterwand. Den Punkten des Gegenstandes A_1, A_2 entsprechen Zerstreuungskreise, deren Mittelpunkte auf A_1P, A_2P, in A_1', A_2' liegen. Man hat also eine perspektivische und, wenn der Gegenstand in einer zu $A_1'A_2'$ parallelen Ebene liegt, eine ähnliche Darstellung. $\sphericalangle\, OPA_1 = O'PA_1'$ usf. Bei Betrachtung der Darstellung von einem beliebigen, nicht gezeichneten Punkte P' gilt die Gleichung (1) für $OPA = w = O'PA'$, $O'P'A' = w'$.

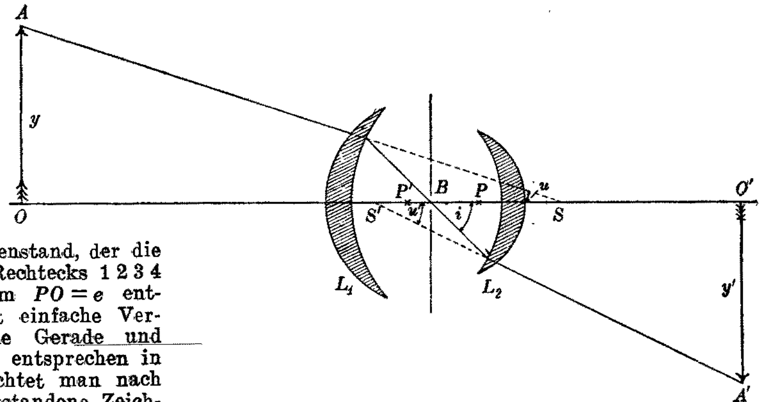

Fig. 4. (Nach *M. v. Rohr 1*, 272. Die Bezeichnung dieser Figur weicht von der im Texte gebrauchten, gegenwärtig üblicheren, teilweise ab.) Wiedergabe einer ebenen Zeichnung, zu der die Punkte O, A gehören, durch eine Linsenfolge. $O'A'$ ist die Bildebene, die man durch Betrachtung des Strahlenlaufs in der Nähe der Achse erhält (die Gaußische Bildebene), OO' die Achse. — B ist die Blende oder Linsenöffnung, die das Strahlenbündel am meisten beschränkt. — Die beiden vorher und nachher durchlaufenen Teile der Folge L_1 und L_2 sind durch Linsen angedeutet, bei einer Vorderblende fällt L_1, bei einer Hinterblende fällt L_2 fort. — Der durch die Mitte von B gehende Hauptstrahl von A aus scheint vor der Brechung durch S, nach der Brechung durch S' zu gehen, die Bildebene schneidet er in A'. — Die Figur gibt ferner die Punkte P, P' an, in die für kleine Werte von OA, $O'A'$ die Punkte S, S' fallen würden; wäre die sphärische Abweichung gehoben, so würde $PS = 0$, $P'S' = 0$ sein. Im Texte sind dagegen statt S, S' die Bezeichnungen P, P' gewählt; ebenso sind die in der Figur u, u' genannten Winkel dort w und w' genannt. — Die Formeln im Text lassen sich aus der Figur ablesen. — Der Punkt $\mathfrak{A}'$, der nach der Gaußischen Theorie A entspräche, ist nicht gezeichnet.

Nicht ohne weiteres hat man eine ähnliche Wiedergabe bei einem optischen Instrument, das auf der Erzeugung eines optischen Bildes beruht[3]).

Es werde wieder ein ebener Gegenstand durch ein photographisches Objektiv auf der Platte oder durch einen Projektionsapparat (Zauberlaterne) auf einer weißen Wand dargestellt, als Darstellungsebene sei *die* achsensenkrechte Ebene gewählt, in der das Bild des Achsenpunktes der Dingebene liegt (Gaußische Bildebene). (Fig. 4.) Alle Strahlen, die zur Wiedergabe eines Punktes A des Gegenstandes beitragen, müssen durch sämtliche Blenden und Öffnungen der Linsenfolge hindurchgehen. — Der Strahl, der durch die Mitte *der* Öffnung, die das Strahlenbündel am meisten einschränkt, geht, heißt Hauptstrahl, die Punkte P und P', in denen er (unter Umständen verlängert) vor und nach dem Durchgang durch die Linsenfolge deren Achse schneidet, nennt man die Mitten der Eintritts- und Austrittspupille (s. *M. v. Rohr 4*, 6). Für den Achsenpunkt des Gegenstandes O fällt der Hauptstrahl mit der Achse zusammen. Von ihm hat man in der Darstellungsebene ein optisches Bild O' in dem in Anm. 3 angegebenen Sinne. — Für einen andern Punkt A wird im allgemeinen auf dem Hauptstrahle überhaupt kein Bild entstehen — dieser wird sich nur mit gewissen nahe benachbarten Strahlen in zwei verschiedenen Punkten, den sogenannten sagittalen und tangentialen Bildpunkten, schneiden. Ist aber auch durch Hebung dieses als Astigmatismus bezeichneten Fehlers eine Abbildung hergestellt, so wird sie doch nicht auf der Darstellungsebene aufgefangen, falls nicht auch noch die Krümmung des Bildes beseitigt ist. — Aus Stetigkeitsgründen wird freilich die Darstellung mindestens für ein gewisses Gebiet um die Achse immer schärfer sein als bei der Lochkamera. Aber diese Fragen der *Güte* der Wiedergabe — zu denen auch die Abbildung durch weitere Bündel, Hebung der sphärischen Abweichung gehört — kann man beiseite lassen, wenn man nur ihre *Treue* untersuchen will. Da die Lichtstrahlen tatsächlich in einer Ebene aufgefangen werden, kann kein Zweifel entstehen, daß man jedem Punkte A einen Punkt in dieser Ebene zuordnen muß, und zwar faßt man als diesen Punkt (Mittelpunkt der Zerstreuungsfigur) den auf, wo der Hauptstrahl AP nach seiner Brechung ($P'A'$) die Ebene schneidet, es sei A'. Dieser durch ein von *A. Gullstrand* (*1*, 6) als optische Projektion bezeichnetes Verfahren abgeleitete Punkt stimmt nicht ohne weiteres mit dem Punkte $\mathfrak{A}'$ überein, der durch ähnliche Projektion entstehen würde und den die Gaußische Abbildung gäbe. Es ist:

$$y' : y = O'A' : OA = P'O' \operatorname{tg} O'P'A' : PO \operatorname{tg} OPA$$

$$O'\mathfrak{A}' : OA = \beta \quad (\beta \text{ lineare Vergrößerung eines kleinen Stücks}).$$

Bezeichnet man jetzt die Winkel an den Pupillen mit w, w', so ist die Bedingung für eine ähnliche Abbildung:

$$P'O' \operatorname{tg} w' : PO \operatorname{tg} w = \beta = \text{const.}, \quad \ldots \quad (2$$

und allgemein ist:

$$\frac{O'A'}{O'\mathfrak{A}'} - 1 = \frac{P'O' \operatorname{tg} w'}{\beta\, PO \operatorname{tg} w} - 1 = V_z, \quad \ldots \quad (3$$

der (meist in Prozenten ausgedrückte) Fehler der Darstellung, die „Verzeichnung".

Da die Blende im allgemeinen weder nach der Ding- noch nach der Bildseite ohne sphärische Abweichung abgebildet wird, sind PO und $P'O'$ von w, w' abhängig. Wenn jedoch diese Abweichungen gehoben sind, hat man statt (2) die Bedingung:

$$\operatorname{tg} w' : \operatorname{tg} w = \text{const.} \quad \ldots\ldots \quad (2a$$

Dies tritt auch ein, wenn Ding- und Darstellungsebene sehr weit entfernt sind, so daß die Abweichung von P und P' gegen die Entfernung verschwindet. Hier kann überhaupt nicht von einer linearen Vergrößerung β die Rede sein, man muß schreiben:

$$\operatorname{tg} w' : \operatorname{tg} w = \gamma. \quad \ldots\ldots \quad (2b$$

Ist nur der Gegenstand unendlich fern (z. B. Himmelsphotographie), so wird die Bedingung:

$$\frac{P'O' \operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{const.} = f \quad \ldots\ldots \quad (2c$$

(Gaußische Definition der Brennweite), und in einem wichtigen Falle, dem einer Hinterblende, ist $P'O' = \text{const}$; und die Forderung:

$$\operatorname{tg} w' : \operatorname{tg} w = \frac{f}{P'O'} = \text{const.} \quad \ldots \quad (2d$$

Die Gleichungen (2 a), (2 b), (2 d) stimmen mit (1) überein, sind aber nicht von selbst erfüllte Beziehungen, sondern Bedingungen, denen die Linsenfolge möglichst genügen soll.

Die Bedingung (2) ist zuerst von *R. H. Bow* 1861 aufgestellt worden (s. *M. v. Rohr 2*), die Bedingung (2b) schon 1827 von *G. B. Airy* (*1*, 4).

Es sei bemerkt, daß es an und für sich nicht notwendig ist, als Auffangebene die Gaußische Bildebene vorauszusetzen. Verschiebt man sie, so bleiben die Tangenten der Winkel ganz ungeändert, und man sieht leicht, daß sich zwar die Deutlichkeit der Darstellung, nicht aber die Verzeichnung ändert. — Infolgedessen werden auch räumliche Gegenstände bei gehobener Verzeichnung zwar mit wechselnder Deutlichkeit und auch mit wechselnder Vergrößerung dargestellt, die letztgenannte ist aber in jeder achsensenkrechten

[3]) In der Mathematik nennt man jede eineindeutige Beziehung zwischen Raumelementen eine Abbildung, ein Bild. Auch die Darstellung eines ebenen Gegenstandes auf der Hinterwand der Lochkamera könnte daher diesen Namen führen. — In der Optik empfiehlt es sich wohl, nach dem Vorgange von *A. Gullstrand* (1), den Ausdruck nur dann zu gebrauchen, wenn wenigstens ein dünnes Bündel von Lichtstrahlen aus dem Dingpunkte (der Dinglinie) sich im Bildpunkte (der Bildlinie) vereinigt. — Für die bildartige Erscheinung in andern Fällen mag man lieber, mindestens wo Mißverständnisse möglich sind, allgemeinere Worte, wie „Darstellung", „Wiedergabe", unter Umständen auch „Projektion" anwenden.

Ebene fest, man kann dann so vorgehen, daß man die Eintrittspupille mit den Dingpunkten verbindet und die Schnittpunkte mit der Ebene bestimmt, deren Gaußische Bildebene die photographische Platte oder die Wand ist, dann ist es das so entstehende „Abbild" in der Dingebene (*M. v. Rohr, 4,* 9), dessen Gaußische Abbildung man als Darstellung erhält.

Daraus folgt etwas Weiteres für die Betrachtung: Will man eine bloße Wiederholung des Gegenstandes haben, so muß man die Photographie usf. aus einer Entfernung betrachten, die sich zu dem Abstande der Eintrittspupille von der Dingebene verhält wie die Photographie zum Gegenstande oder vielmehr zu dessen Abbilde. Es sind dann die scheinbaren Winkel gleich den Winkeln w, und man hat nicht nur den Eindruck eines „ähnlichen Bildes", sondern den richtiger Plastik. Will man dagegen einen größeren Sehwinkel haben — das Instrument nicht nur als wiederholend, sondern auch als „verdeutlichend" (*M. v. Rohr 4,* 33—34) benutzen, so muß man auf

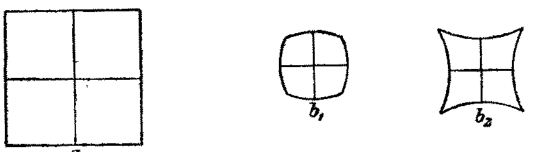

Fig. 5. (Nach *M. v. Rohr, 3,* 242, Fig. 59.) Wiedergaben (b_1, b_2) eines Quadrats a durch verzeichnende Linsenfolgen. (Da ein photographisches Objektiv angenommen war, sind sowohl b_1 wie b_2 verkleinert.) Wenn y'/y mit wachsender Entfernung von der Achse kleiner wird, so werden die (nicht gezeichneten) Diagonalen in kleinerem Maßstabe wiedergegeben als die Querlinien, und es entsteht die Form b_1, im entgegengesetzten Falle die Form b_2 (man nennt b_1 eine Darstellung mit tonnenförmiger, b_2 eine solche mit kissenförmiger Verzeichnung).

die richtige Plastik verzichten und sich auf die Ähnlichkeit in den einzelnen achsensenkrechten Ebenen beschränken.

Bei jeder ähnlichen Darstellung entsprechen geraden Linien Gerade; Verzeichnungsfreiheit hat also die Wirkung, daß wenigstens in achsensenkrechten Ebenen verlaufende Gerade wieder als solche dargestellt werden. Für andere Gerade gilt das gleiche wenigstens dann, wenn man die Abweichungen der Eintrittspupille vernachlässigen kann, z. B. im Falle der Gleichungen (2 a) bis (2 d). Da nämlich das Abbild (s. vorvorigen Abschnitt) durch Projektion von der Eintrittspupille entsteht und ähnlich abgebildet wird, bleibt die Geradlinigkeit erhalten. Andererseits werden bei einer nicht verzeichnungsfreien Darstellung selbst ebenen geradlinigen Figuren krummlinige entsprechen. Die Diagonalen eines zur Achse symmetrischen Quadrats werden in einem andern Verhältnisse vergrößert als die Abstände der Seitenmitten vom Mittelpunkte, daher werden die Seiten des Quadrates und alle Geraden, die nicht die Achse schneiden, als krumme Linien erscheinen (Fig. 5).

Den letzten Absatz wird der Mathematiker ohne weiteres auf einen unendlich fernen Gegenstand anwenden, da er die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte als Ebene auffaßt. Aber auch bei der gewöhnlichen Auffassung als Kugel (Himmelsgewölbe) ist die Übertragung leicht, unwillkürlich betrachtet man bei ihr größte Kreise als gerade Linien, wie in der bekannten Vorschrift, zwei Sterne des großen Bären durch eine Gerade zu verbinden, um den Polarstern zu finden. Nun sagt die Bedingung (2 c) $O'A' = \text{const.}\ \operatorname{tg} w$, daß man sich eine verzeichnungsfreie Darstellung der Himmelskugel durch Projektion vom Mittelpunkte aus auf eine zur Achse ($w = 0$) senkrechte Ebene entstanden denken kann (gnonomische Kartenprojektion), dann werden aber größte Kreise durch Gerade dargestellt (Fig. 6).

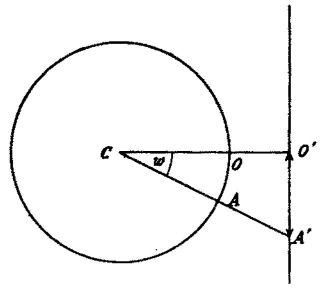

Fig. 6. Die Projektion einer Kugel OA von ihrem Mittelpunkte B aus auf eine Ebene $O'A'$ folgt dem Gesetze $O'A' = CO' \operatorname{tg} w = \text{const.}\ \operatorname{tg} w$.

Die Lehre von der Verzeichnung hat sich erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelt, ist aber im allgemeinen nicht der Gegenstand vieler Meinungsverschiedenheiten gewesen (s. *M. v. Rohr 2*). In der Tat ist wohl in allen Fällen, wo ein Auffangen auf ebenen Flächen stattfindet, eine andere Auffassung gar nicht durchführbar. Hierher gehören fast alle „Instrumente zu objektivem Gebrauch" (s. aber unten) und von denen „zu subjektivem Gebrauch" alle die, wo in der Bildebene eine Meßvorrichtung (Mikrometer) angebracht ist; in diesem Falle berücksichtigt man *die* Verzeichnung nicht, die etwa durch eine Okularbetrachtung der Bildebene entsteht, da sie auf Mikrometer und Darstellung gleich wirkt und daher die Messung nicht beeinflußt.

Aber auch für den Fall, daß man Werkzeuge zu subjektivem Gebrauch hat, und keinerlei Vergleich mit einer Ebene stattfindet, ist bis vor wenigen Jahren wohl kaum daran gezweifelt worden, daß man gleichwohl eine Projektion auf je eine Ebene im Ding- und Bildraume vornehmen und hiernach die Verzeichnung zu bemessen hat. Dies führt zu den Tangentenformeln (2)—(2 d) und (3); die Forderung (2 a) ist von *Airy* gerade für den Fall eines Fernrohrs, also eines subjektiven Werkzeugs angegeben worden.

L. J. Schleiermacher (1, 592—597) faßt nicht den Hauptstrahl durch die Blendenmitte, sondern einen auf eigentümliche Weise bestimmten Strahl, den er als Achse des Strahlenbündels bezeichnet, als maßgebend auf, dies indessen sowohl bei Folgen zu objektivem wie zu subjektivem Gebrauch. Er bestimmt dann für die erstgenannten den Radiusvektor in der Ebene der Darstellung, für die zweiten die Tangente des Winkels, den die Achse des Bündels mit der Achse der Folge bildet. Er verlangt dann ausdrücklich, daß die scheinbare Größe aller einzelnen Teile gleich der des entsprechend vergrößerten Gegenstandes wäre. — Seine Ableitungen — die sich freilich auf ebene achsensenkrechte Gegenstände beschränken — weichen von den späteren nicht durch den Begriff der Verzeichnung, sondern dadurch ab, daß die „Achse des Strahlenbündels" an die Stelle des Hauptstrahls tritt.

Es ist hier noch folgendes zu beachten: Für Fernrohre gilt die Gleichung (2 a), für Lupen ist der Gegenstand in endlicher, das Bild bei einem emmetropischen Auge ohne Akkommodationsanstrengung in unendlicher Entfernung, also hat man umgekehrt wie bei (2 a) zu setzen:

$$\operatorname{tg} w' : PO \operatorname{tg} w = \frac{1}{f} = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2e$$

Für Brillen ist zu bemerken, daß sie im allgemeinen für die Ferne angepaßt werden und als Instrumente mit Hinterblende betrachtet werden können, deren Mitte im Augendrehpunkt liegt; es gilt also die Bedingung (2 d), für Lesebrillen (2 a) ($P'O'$ fest). Übrigens ist diese Bedingung bei einfachen sphärisch begrenzten Brillen unerfüllbar; und außerdem würde ihre Erfüllung noch nicht alles erreichen, was wünschenswert wäre. Da nämlich Brillen den Gegenstand in die deutliche Sehweite bringen, nicht aber seine scheinbare Größe ändern sollen, so müßte $w = w'$ verlangt werden; es ist aber bei sammelnden einfachen Brillen stets $w' > w$, bei zerstreuenden $w' < w$, infolgedessen ändert sich auch die Tiefenvorstellung etwas. Es liegt hier ein doppelter unvermeidbarer Mangel vor.

Etwas anders liegt der Fall bei Fernrohrbrillen; es ist mit den dort verlangten Vergrößerungen zwar meistens $w' > w$ verbunden, die Hebung der Verzeichnung ist aber mit Hilfe der reicheren Hilfsmittel möglich und wünschenswert. — Bei deformierten Starbrillen wäre sie auch, aber nur mit starker Durchbiegung möglich.

Gerade auf Brillen geht jedoch in erster Linie ein Einspruch, der neuerdings gegen die übliche Berechnung der Verzeichnung erhoben worden ist.

A. Whitwell schreibt (*1*, 151): „Die Tangentenbedingung ist anzuwenden für optische Instrumente, die einen ebenen Gegenstand auf eine ebene Fläche projizieren, z. B. auf eine photographische Platte. Sie gilt nicht für optische Werkzeuge zum Gebrauch mit einem bewegten (rolling) Auge. Man wolle ein ausgedehntes weit entferntes Gesichtsfeld mit einem optischen Instrument wie Brille oder Fernrohr[4]) untersuchen, das Feld sei so groß, daß zur Untersuchung seiner äußeren Teile sich das Auge drehen muß; wenn dann keine Verzeichnung bestehen soll oder jeder Teil des Feldes zu der gleichen Ausdehnung (to the same extent) vergrößert werden soll, muß das Instrument für den Drehpunkt sphärisch korrigiert sein und die *Winkelbedingung* erfüllen. Die Winkelbedingung ist, daß der Hauptstrahl jedes einfallenden Bündels einen Winkel mit der Achse bildet, der zu dem Winkel des entsprechenden austretenden Strahles ein festes Verhältnis hat." (Es folgt eine Auseinandersetzung, die aber kaum etwas Neues bringt außer dem Zusatz, daß der Augendrehpunkt und sein scheinbarer Ort nahe zusammenfallen sollen; dann eine mathematische Fassung der gestellten Forderung.)

M. Tscherning (*1*, 13) betont die Bedeutung gehobener Verzeichnung für Brillen: „Mit einem Paare gewöhnlicher Brillengläser sieht man den mittleren Teil des Feldes scharf und ohne Verzerrungen (déformations), am Rande dagegen erscheinen die Gegenstände flau wegen des Astigmatismus und verzerrt (déformées) wegen der fehlenden Verzeichnungsfreiheit (orthoscopie). Man kann fragen, die Hebung welches Fehlers die wichtigste ist. Die Optiker halten sich an den ersten, die Beobachtungen in der Klinik scheinen aber für das Gegenteil zu sprechen; die am Star operierten beklagen sich im allgemeinen vor allem darüber, daß sie die Gegenstände durch ihre Brillengläser verzerrt sehen." Nach Auseinandersetzungen über die Messung folgt (20): „Damit das Glas *orthoskopisch* ist, müssen die Werte von $\alpha\,[w']$ und $\beta\,[w]$ proportional sein."

E. Weiß (*1*, 324; 11) stellt sich auf den nämlichen Standpunkt: „Denn das ideale Brillenglas sollte die unendlich ferne Kugel auf der Fernpunktskugel richtig abbilden, in diesem Falle müßte eine Schar konzentrischer, äquidistanter Kreise (deren Mittelpunkt in der primären Blickrichtung liegt) als eine Schar konzentrischer äquidistanter Kreise auf der Fernpunktskugel abgebildet werden, und dies trifft offensichtlich nur zu, wenn das Verhältnis (der *Winkel)* konstant ist." (332; 16): „Ob diese Formen gerade Objektlinien auch gerade erscheinen lassen, ist eine offene Frage, deren Beantwortung wohl auf psychophysikalischem Gebiete gefunden werden müßte." (369, 39): „Es gibt ferner Formen, bei

[4]) Die Betrachtung durch das bewegte Auge ist beim Erd- oder Himmelsfernrohr etwas anders als beim Holländischen Fernrohr und der Brille. — Bei diesen dient als Austrittspupille der Drehpunkt des Auges, bei jenen die reelle Austrittspupille des Instruments, der sichtbare Ramsdensche Kreis, durch den man mittels Bewegung von Auge und Kopf „wie durch ein Schlüsselloch" beobachtet (*M. v. Rohr*, *4*, 24, 58). *Whitwell* will seinen Einspruch gegen die Berechnung nach dem Tangentenverhältnis also auf beide Fälle anwenden.

welchen die Außenwelt maßstabrichtig (geometrisch ähnlich) abgebildet wird.“[5]).

Zu der Weißischen Ausdrucksweise ist zunächst zu sagen, daß das Wort „Abbildung“ offenbar in rein mathematischem Sinne gebraucht ist (s. Anm. 2); allerdings ist es für eine Brille das Ideal, daß nicht wie bei einem vollkommenen photographischen Objektiv, auf einer Ebene, sondern auf einer Kugel um den Augendrehpunkt und durch den Fernpunkt eine (von Astigmatismus freie) Abbildung entsteht, weil dann das Auge bei seiner Bewegung, ohne Akkommodation, stets auf ein Bild ferner Gegenstände eingestellt wäre (*M. v. Rohr 5*, 54); aber 1. ist diese Forderung in den meisten Fällen nicht zu erfüllen, 2. muß man den Begriff der Verzeichnung erklären können und verschiedene Brillen in bezug auf Verzeichnung vergleichen, ganz unabhängig davon, ob überhaupt im optischen Sinne von einer Abbildung die Rede sein kann. — *Weiß* will die „optische Projektion“ nicht auf eine Ebene, sondern auf die erwähnte Kugel durch den Fernpunkt vornehmen, auf der bei einer vollkommenen Brille eine Abbildung stattfände.

Es ist also von drei um die Brillenfrage verdienten Schriftstellern die Forderung gestellt, die Bedingung $\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{const.}$ zu ersetzen durch $\frac{w'}{w} = \text{const.}$

Zunächst soll durch eine kleine Tafel gezeigt werden, welche zahlenmäßige Bedeutung die Frage hat.

unter I für $\frac{w'}{w} = \text{const.}$, unter II für $\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = \text{const.}$; in unmittelbarer Nähe der Achse stimmen beide Werte überein.

Einige Beispiele mögen die Bedeutung der Tafel veranschaulichen. Bei einfachen Brillengläsern für Kurzsichtige ist $w' < w$, und zwar hat man unter zweckmäßigen Annahmen für -11 dptr in der Nähe der Achse etwa $Qu = \frac{w'}{w} = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = 0{,}75$. In der Nähe des Randes ($w' = 30°$) müßte man bei Erfüllung der Winkelbedingung einen Gegenstand von $w = 40°$, der Tangentenbedingung einen solchen von $37°{,}58 = 37°35'$ haben. — Für $+7$ dptr ist etwa $Qu = 1{,}25$, da man hier einen etwas größeren Winkel auf der Augenseite (35°) annehmen kann, hätte man einmal $w = 28°$, das andere Mal $w = 29°{,}26 = 29°16'$. — Ein Starglas von $+12$ dptr gibt etwa $Qu = 1{,}50$; $w' = 35°$ entspricht I $w = 23°{,}33 = 23°20'$; II $w = 25°{,}02 = 25°1'$. — Bei einer Fernrohrbrille ist folgendes Beispiel möglich: -7 dptr, $Qu = 1{,}5$. Am Rande $w' = 15°$, I $w = 10°$, II $w = 10°{,}13 = 10°8'$. — Einem 3fach vergrößernden holländischen Fernrohr gibt man ein scheinbares Gesichtsfeld von 20°, am Rande ist $w' = 10°$, was fast völlige Übereinstimmung beider Bedingungen bedeutet. Dagegen kann für ein astronomisches Fernrohr leicht $w' = 20°$ gemacht werden, und $w' = 25°$ kommt vor. — Es ist hiernach der Unterschied beider Bedingungen oft so

Qu	5°		10°		15°		20°		25°		30°		35°	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
0,75	6,67°	6,65°	13,33°	13,23°	20,00°	19,66°	26,67°	25,88°	33,33°	31,86°	40,00°	37,58°	46,67°	43,02°
1,25	4,00	4,00	8,00	8,01	12,00	12,10	16,00	16,24	20,00	20,46	24,00	24,79	28,00	29,26
1,50	3,33	3,34	6,67	6,70	10,00	10,13	13,33	13,64	16,67	17,27	20,00	21,05	23,33	25,02
1,75	2,86	2,87	5,71	5,75	8,57	8,71	11,43	11,75	14,29	14,92	17,14	18,26	20,00	21,81
2,00	2,50	2,51	5,00	5,04	7,50	7,63	10,00	10,32	12,50	13,13				
3,00	1,67	1,67	3,33	3,36	5,00	5,10	6,67	6,92	8,33	8,84				
4,00	1,25	1,25	2,50	2,52	3,75	3,83	5,00	5,20	6,25	6,65				
5,00	1,00	1,00	2,00	2,02	3,00	3,07	4,00	4,16	5,00	5,33				
10,00	0,500	0,501	1,000	1,010	1,500	1,535	2,000	2,085	2,500	2,670				
20,00	0,250	0,250	0,500	0,505	0,750	0,768	1,000	1,043	1,250	1,336				
50,00	0,100	0,100	0,200	0,202	0,300	0,307	0,400	0,417	0,500	0,534				
100,00	0,050	0,050	0,100	0,101	0,150	0,153	0,200	0,209	0,250	0,267				

Die senkrechten Reihen entsprechen den darüber stehenden Winkeln auf der Augenseite, die wagerechten Zeilen den links stehenden Werten für $Qu = \frac{w'}{w}$ oder $\frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w}$. — Die Tafel gibt die Winkel w auf der Dingseite, und zwar stets

groß, daß die Erfüllung der einen am Rande des Instruments nach der andern einen Fehler von 5% und mehr bedeuten würde.

Betrachtet man die Gründe, die für die Rechnung nach dem Winkelverhältnis angeführt werden, so muß zunächst gefragt werden, *wann erscheinen die Gegenstände ähnlich oder „ohne Deformation“*. Die Antwort dürfte nach den früheren Auseinandersetzungen so zu geben sein:

1. *Räumliche Dinge* können nur dann ähnlich wiedergegeben werden, wenn $w = w'$ ist, sonst

[5]) Im Gegensatze zu der Tangentenbedingung läßt sich, wie *Weiß* zeigt, bei einer einfachen Brille die Winkelbedingung erfüllen, doch ist er — meiner Ansicht nach mit Recht — im Gegensatz zu *Tscherning* der Meinung, daß die Hebung des Astigmatismus wichtiger ist.

entsteht wenigstens eine Tiefenunrichtigkeit. Diese Forderung ist bei gewöhnlichen Brillen unmöglich, und beim Fernrohr verlangt sein Zweck, daß $w' > w$ ist.

2. *Ebene Dinge* können ähnlich nur auf Ebenen (genau genommen allerdings auf allen Flächen, die man auf eine Ebene abwickeln kann; doch wird niemand geneigt sein, in der folgenden Überlegung die Darstellungsebene durch eine solche Fläche zu ersetzen) wiedergegeben werden. Nun ist eine *Abbildung* im ganz allgemeinen Falle überhaupt nicht vorhanden und wenn, so wird eine Ebene nicht als Ebene abgebildet. Man kann sich aber durch optische Projektion stets eine ebene *Darstellung* bilden und es scheint, daß man psychologisch einen ebenen Gegenstand meist als eben ansieht, wenn auch die Akkommodation des Auges zu andern Annahmen führen könnte. Damit diese ebene Darstellung aber wenigstens bei achsensenkrechten Figuren dem ebenen Gegenstande ähnlich ist, muß die Tangentenbedingung — allgemein in der Bowschen Form — gelten.

Wann wird nun das durch Fernrohr oder Brille sehende Auge von einer Geraden im Dingraum den Eindruck einer *Geraden* erhalten? — Ich meine, dann, wenn die Hauptstrahlen nach dem Durchgange durch das Instrument in einer Ebene liegen, und das Vorstellungsvermögen imstande ist, die im vorigen Abschnitte erwähnte Versetzung in eine andere Ebene vorzunehmen. — Der Schnitt beider Ebenen wird dem Auge die Dinggerade wiedergeben. — Nimmt man die letztgenannte als in einer achsensenkrechten Ebene liegend an, so folgt aus den Auseinandersetzungen auf S. 277, daß die gestellte Forderung mit der einer ähnlichen Darstellung und also mit der Tangentenbedingung übereinstimmt.

Dies scheint auch durch die Erfahrungen bestätigt zu werden, die man macht, wenn man das Instrument beiseite legt und zu der im Eingang des Aufsatzes behandelten Betrachtung eines ebenen Gegenstandes aus wechselnder Entfernung zurückkehrt. Hier gilt die Tangentengleichung (1). Es erscheint aber eine Linie, die in einer Entfernung als Gerade erscheint, auch in jeder andern als solche, das Gegenteil wäre auch recht unerfreulich. — Es ist aber auch gleichgültig, ob man die Linie deutlich sieht oder nicht. Auch außerhalb meines Akkommodationsbereiches scheint mir eine gerade Linie nicht krumm, während ich die nicht sehr erhebliche Verzeichnung durch den Rand meiner Brille (Punktalglas von — 3 dptr) sehr deutlich merke.

3. *Zeichnungen auf einer krummen Fläche* können nur auf einer ähnlichen Fläche ähnlich dargestellt werden (oder streng genommen, auf jeder Fläche, die sich auf eine ähnliche abwickeln läßt) und auch stets nur im Größenverhältnis beider Flächen, z. B. eine Kugel von 2 m Durchmesser in zweifacher Vergrößerung auf einer solchen von 4 m Durchmesser. — Von Wichtigkeit ist wohl allein der Fall, der auch von *Weiß* angeführt wird, daß die unendlich große Kugel auf der Dingseite mit der auf der Fernpunktskugel gebildeten Projektion verglichen wird, die bei einem vollkommenen Brillenglase eine Abbildung wäre. — Die Ähnlichkeit wird nicht beeinträchtigt, wenn man sich die Fernpunktskugel wieder auf die Himmelskugel projiziert denkt (was ja der Brillenträger tatsächlich durch einen seelischen Vorgang tut) und also die Himmelskugel mit einer Darstellung auf sich selbst vergleicht, bei der $w \gtrless w'$ ist. Diese kann, wie aus der sphärischen Trigonometrie folgt, nie ähnlich sein; von den Forderungen, die der Begriff der Ähnlichkeit stellt, kann nur eine oder die andere, nicht jede erfüllt werden, je nachdem, auf welche man Wert legt, gelangt man zu verschiedenen Formeln. Diese stimmen ziemlich mit denen der Kartographie überein, zu deren Aufgaben man gelangt, wenn man sich Urbild oder Darstellung auf eine Ebene projiziert denkt.

a) Allen größten Kugelkreisen — die gerade Linien vertreten — entsprechen größte Kugelkreise: gnonomische Projektion. Forderung $\operatorname{tg} w' : \operatorname{tg} w = \text{const}$, also die Tangentenbedingung wie in 2. In diesem Falle sind nicht Urbild und Darstellung auf der Kugel ähnlich, wohl aber beider Projektionen vom Augendrehpunkte aus auf eine Ebene.

b) Winkel unendlich kleiner Bögen sind ungeändert. Die lineare Vergrößerung ändert sich von Ort zu Ort, ist aber an jeder Stelle von der Richtung unabhängig: winkeltreue, stereographische Projektion. Formel $\operatorname{tg}\frac{w'}{2} : \operatorname{tg}\frac{w}{2} = \text{const.}$

c) Die Flächenvergrößerung Fl ist vom Orte unabhängig. Es scheint fast, als wolle *Whitwell* dies erreichen, die Formel für diese flächentreue Projektion ist aber:

$$\sin\frac{w'}{2} : \sin\frac{w}{2} = \text{const.} = \sqrt{Fl}.$$

d) Durch $\frac{w'}{w} = \text{const.}$ wird keine dieser Forderungen erreicht, es kann also weder von Ähnlichkeit noch von Darstellung gerader Linien durch Gerade die Rede sein. Als Vorteil könnte man nur das anführen, daß einem doppelten Winkel mit der Achse eine doppelte Augenbewegung entspreche[6]).

[6]) *Whitwell* verlangt, daß ein unendlich kleiner Zuwachs dw des Winkels w überall gleichmäßig vergrößert wird, woraus allerdings die Winkelbedingung folgen würde; die Forderung selbst ist aber nicht recht begründet. — Ein kleiner Winkel dw' auf der Augenseite wird im allgemeinen nicht mit bewegtem, sondern mit ruhendem Auge beobachtet werden, d. h. seine Spitze liegt nicht im Augendrehpunkt, sondern in der scheinbaren Augenpupille; man kann nicht ohne weiteres sagen, daß der Zuwachs von w' auch der Winkel wäre, in dem ein kleiner Gegenstand an der Himmelskugel erscheint. Aber auch abgesehen davon erscheint ein solcher Gegenstand nicht durch $\frac{dw'}{dw}$ in der richtigen Gestalt, weil ein Winkel, dessen Ebene senkrecht

Man müßte, um Verzeichnungsfreiheit so zu erläutern und diese Erklärung doch auch auf irdische Gegenstände zu übertragen, behaupten, daß unser Auge etwas wie Verzeichnung erlebte, wenn wir uns einem Gegenstande nähern — es bleibt dann das Tangenten-, aber nicht das Winkelverhältnis fest — und einen Unterschied in der Verzeichnung annehmen, je nachdem man einen Sonnenfleck mit dem Fernrohre beobachtet oder, was durch eine geringe Änderung der Versuchsanordnung möglich ist, photographiert; besonders schwer verständlich scheint mir, daß die Änderung der Formel nicht nur auf der Bildseite, sondern auch auf der Dingseite eintritt, wo überhaupt alles ungeändert geblieben ist.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, daß ich mir durchaus Vorrichtungen vorstellen kann, wo die Tangentenformel durch andere ersetzt werden müßte. — Man wolle ein Spektrum mit Fraunhoferschen Linien photographieren. Das Objektiv sei nicht auf Astigmatismus und Bildfeldwölbung korrigiert, und die Güte einer ebenen Projektion nicht ausreichend. Man kann sie sehr verbessern, wenn man die Platte zylindrisch gebogen nimmt, und zwar so, daß ihre Krümmung mit der tangentialen Bildfläche übereinstimmt. Breitet man die Photographie auf eine Ebene aus, so ist im Bilde die Entfernung einer Linie von der Mitte dem Winkel w' proportional, der aber nicht an der Austrittspupille, sondern am Mittelpunkte der Bildfläche zu nehmen ist. — Ist nun das Spektrum durch ein Beugungsgitter gebildet, so hat man auf der Dingseite:

$$\sin w = \frac{\lambda}{b},$$

wo b eine Gitterkonstante, λ die Wellenlänge ist. Soll nun endlich die Ausdehnung sofort im Verhältnis der Wellenlängen stehen, so wäre die Bedingung:

$$\frac{w'}{\sin w} = \text{const.},$$

für kleine w auch:

$$\frac{w'}{w} = \text{const.}$$

Doch brauche ich wohl nicht hinzuzufügen, warum man eine solche Bedingung nicht als die der Verzeichnungsfreiheit bezeichnen kann.

Alles bisher erörterte bezieht sich auf Linsenfolgen mit einer Umdrehungsachse. — Als Brillen werden häufig zur Hebung des Astigmatismus des Auges Linsen verwandt, die nur zweifach symmetrisch sind. Bei diesen ist im allgemeinen die Vergrößerung schon in der Mitte des Gesichtsfeldes in verschiedenen Richtungen verschieden. Ich habe vor einigen Jahren das Zusammenwirken dieses Fehlers mit der Verzeichnung kurz besprochen (*1*). Da ein kleiner Kreis in eine ellipsenartige Figur verwandelt wird, habe ich den Fehler „elliptische Deformation" genannt, gebe diesen unschönen und umständlichen Ausdruck aber preis, sowie ein besserer angeführt wird; das Wort Verzeichnung sollte man aber für den Fehler außer der Achse behalten, der auch bei Umdrehungsfolgen vorkommt.

zur Drehungsrichtung des Auges liegt, anders vergrößert werden würde. — Diese Art Ähnlichkeit läßt sich eben durch Erfüllung der Bedingung b) erreichen.

Quellenverzeichnis.

Airy, G. B. (1), On the spherical aberration of the eye-pieces of telescopes (1827). Camb. Phil. Trans. 1830, *3*, 1—64. — Sonderabdruck: Cambridge, J. Smith, 1827, 4°, 63 S. mit 1 Tafel.

Boegehold, H. (1), Physiologische und mathematische Meinungsverschiedenheiten in der Bewertung sphärotorischer Brillen. Z. f. ophthalm. Opt. 1918, *6*, 14—21.

Gullstrand, A. (1), Tatsachen und Fiktionen in der Lehre von der optischen Abbildung. Arch. für Opt. 1907 *1*, 2—41, 81—97.

Lummer, O. (1), Beiträge zur photographischen Optik. Z. f. Instrk. 1897, *17*, 208—219, 225—239, 264—271. 25 Fig. im Text.

v. Rohr, M. (1) Über die Bedingungen für die Verzeichnungsfreiheit optischer Systeme mit besonderer Bezugnahme auf die bestehenden Typen photographischer Objektive. Z. f. Instrk. 1897, *17*, 271—277. 1 Fig. im Text.

— (2) Beitrag zur Kenntnis der geschichtlichen Entwicklung der Ansichten über die Verzeichnungsfreiheit photographischer Objektive. Z. f. Instrk. 1898, *18*, 4—12. 5 Fig. im Text.

— (3) Die Theorie der optischen Instrumente. I. Band. Die Bilderzeugung in optischen Instrumenten vom Standpunkte der geometrischen Optik. Berlin, Jul. Springer, 1904. XXII u. 587 S. 133 Fig. im Text.

— (4) Die optischen Instrumente. (Aus Natur und Geistesw. 88.) 3. Aufl. Leipz. u. Berlin, B. G. Teubner, 1918. VI u. 137 S. 89 Fig. im Text.

— (5) Das Auge und die Brille. (Aus Natur und Geistesw. 372.) 2. Aufl. Leipz. u. Berlin, B. G. Teubner, 1918. 106 S., 1 Tfl., 84 Fig. im Text.

Schleiermacher, L. J. (1), Analytische Optik I, Darmstadt, G. Jonghaus, 1842. XVI u. 608 S.

Tscherning, M. (1), Moyens de contrôle de verres de lunettes et de systèmes optiques en général. Kgl. Danske Vid. Selsk. Math. fys. Medd. 1918 I, 9, 3—20.

Weiß, E. (1), Analytische Darstellung des Brillenproblems für sphärische Einzellinsen. C. Zeit. f. Opt. u. Mech. 1920, *41*, 321—325, 337—342, 354—357, 369—370. Auch besonders als Heft 5 der Samml. opt. Aufs. herausgeg. von Dr. *H. Harting*, Berlin 1920. 44 S. 5 Fig. im Text.

Whitwell, A. (1), On the sine, the tangent and the angle conditions. The Optician 1914/5, *48*, Nr. 1235, v. 27. XI., 149—153. 7 Fig. im Text.

Die Geologie der Torfmoore[1]).

Von H. Höfer-Heimhalt, Wien.

(Schluß.)

Die *chemische Zusammensetzung* des Torfes ist im allgemeinen je nach seinem Ursprungsmaterial, dem Grade dessen Umwandlung und den zugeführten mineralischen Bestandteilen verschieden. Es seien hier noch die von *R. Miklaus* ausgeführten Analysen von zwei Torfarten aus dem Moränenödenseemoor (Obersteiermark) — einem

[1]) *W. Bersch* faßt in seinem „Handbuch der Moorkultur" (Verlag W. Frick, Wien-Leipzig, 2. Auflage, 1912) die Literatur bis 1912 zusammen.